ભૂમિતિનાં મૂળતત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

પુષ્કળ વિવેચન, સમજ અને ઉપયોગી અનુમાનો સાથે.

છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થિઓ સારૂ.

રચનાર.

માણેકલાલ નાગરદાસ શાહ,

રાજકોટ વિકટોરિઆ જ્યુબિલી તાલુકાસ્કૂલ હેડમાસ્તર અને
કાઠિઆવાડ એજન્સિ વકીલ.

सत्यमेव जयते.



આવૃત્તિ પહેલી.

અમદાવાદ.

મામાની હવેલી મધ્યે યુનાઇટેડ પ્રિન્ટિંગ અને જનરલ
એજન્સિ કંપની "લિમિટેડના" પ્રેસમાં

રણછોડલાલ ગંગારામે છાપ્યાં.

સંવત ૧૯૪૫. સને ૧૮૮૯.

કીમત ચાર આના.

૪૨૮૫

ભૂમિતિનાં મૂળતત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

પુષ્કળ વિવેચન, સમજ અને ઉપયોગી અનુમાનો સાથે.

છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થિઓ સારૂ.

રચનાર.

માણેકલાલ નાગરદાસ શાહ,

રાજકોટ વિકટોરિઆ જ્યુબિલી તાલુકાસ્કૂલ હેડમાસ્તર અને,
કાઠિઆવાડ એજન્સિ વકીલ.

सत्यमेव जयते.



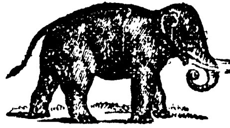
આવૃત્તિ પહેલી.

અમદાવાદ.

મામાની હવેલી મધ્યે યુનાઇટેડ પ્રિન્ટિંગ અને જનરલ
એજન્સિ કંપની "લિમિટેડના" પ્રેસમાં
રણછોડલાલ ગંગારામે છાપ્યાં.

સંવત ૧૯૪૫. સને ૧૮૮૯.

કીમત ચાર આના.



અર્પણ પત્રિકા.

કદરદાન મુરબ્બી શ્રી રાવબહાદુર ગોપાળજી સુરભાઈ દેશાઈ, આસિસ્ટંટ એજ્યુકેશનલ ઈન્સ્પેકટર પ્રાંત કાઠિઆવાડ અને ફેલો ઑફ ધી યુનિવરસિટિ.

કામ કરવાની આવડ અને ઉંડી સમજ, તીવ્ર અને શોધક બુદ્ધિ, તથા ખંતિલાપણા સાથે અખંડ ઉગ્ર ઉદ્યોગમાંજ મગ્ન, એ આદિ આપના સર્વોત્તમ સદ્ગુણોવડે આ કાઠિઆવાડમાંથી અજ્ઞાનરૂપી અંધકાર નીકળી, આવો **જ્ઞાનરૂપી સૂર્ય પ્રકાશ્યો**; તેનું ઘણું **ખરૂં માન આપનેજ** ઘટે છે. માટે; તેની **મુબારક યાદગીરી** ચિરંકાળ રહેવા સારૂ કેળવણી ખાતાને ઉપયોગી એવું આ લઘુ પુસ્તક હું આપની રજા લઈ અતિ નમ્રતાથી આપને અર્પણ કરી **અથાગ હર્ષિત** થાઉંછું.

તા. ૧ લી જુલાઈ
૧૮૮૯.
રાજકોટ.

લી. ચર્ણરજ સેવક,
માણેકલાલ નાગરદાશ શાહ.
વિકટોરિઆ જ્યુબિલી તાલુકા સ્કૂલ હેડમાસ્તર.
રાજકોટ.

પ્રસ્તાવના.

ગૂજરાતી નિશાળોના છઠ્ઠા ધોરણમાં હાલમાં સરકારે ભૂમિતિનો વિષય દાખલ કરેલો છે. આ વિષયપર ગૂજરાતી ભાષામાં બે એક પુસ્તકો છે પરંતુ નિશાળોમાં ચલાવવા યોગ્ય શુદ્ધ,સરળ અને યથાર્થ પુસ્તકની મને જરૂર જણાતાં બે ત્રણ અંગ્રેજી, ગૂજરાતી તથા મરેઠી પુસ્તકોને આધારે અને શીખવવામાં શું શું અગત્યનું છે અને કેવી કેવી અડચણો પડેછે એ વગેરે બાબત મારો પોતિકો અનુભવ ભેળીને આ પુસ્તક તૈયાર કર્યું છે. મારા પરમ પ્રીયમિત્ર રાજ્યમાન રાજેશ્રી **કેશવલાલ સખીદાસ સંઘાણી**, આસિસ્ટંટ એન્જિનિયર માલેગામ જીલ્લે ખાનદેશ. એમણે, આ પુસ્તક અથથી ઇતિ સુધી વાંચી યોગ્ય ફેરફાર કરવા ભલામણ કીધી છે માટે, આ પ્રસંગે તેમનો ઉપકાર માનુંછું. અને હજી કોઈ સજ્જનને કાંઈ દોષ જણાય તો તેમણે જણાવવા મેહેરબાની કરવી કે, બીજી આવૃત્તિમાં સુધારો કરવાનું બને.

આ પુસ્તકમાં કેટલીક પ્રતિજ્ઞાઓ એકથી વધારે રીતે સિદ્ધ કરી બતાવી છે; પુષ્કળ વિવેચન અને સમજુતિ આપીછે; ઉપરાંત વિદ્યાર્થિઓની બુદ્ધિ ખીલવવાને થોડાં એક ઉપયોગી અનુમાનો આપવાને આપણા, લોકપ્રીય અને ખંતિલા આસિસ્ટંટ ઈન્સ્પેક્ટર રા. બા. ગોપાળજીભાઇએ સૂચના કરી તે મોટા ઉપકાર સાથે સ્વીકારી, તેવાં અનુમાનો જેજે પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી સિદ્ધ થઈ શકેછે તે તે પ્રતિજ્ઞાઓ નીચે છેવટે આપ્યાંછે.

શિક્ષકોને સૂચના.

ભૂમિતિનો વિષય શીખવવાનું કામ બહુ કઠણ છે એવી કેટલાક શિક્ષકો બૂમો પાડેછે; અલબત આ વિષય કઠણ છે એમાં શક નથી; પરંતુ યોગ્ય પદ્ધતિસર અને ચતુરાઇથી શિક્ષક શીખવે તો, સરળતાથી શીખવી શકેછે.

પ્રથમ વ્યાખ્યાઓ સારી પેઠે સમજાવવી. દરેક વ્યાખ્યા શીખવતી વખતે પાટીઆ પર તેવા આકારો કાઢી બતાવવા અગર કાગળના આકારો કરી બતાવવા કે, લાકડાના આકારો હોય તો બતાવવા. અને બની શકે તેટલા પ્રત્યક્ષ દાખલા બતાવવા. જેમકે, પંદરમી વ્યાખ્યા શીખવતી વખતે ગાડીના પૈડાનો દાખલો લેવો. તેમાં મધ્ય બિંદુ, પરિધ અને ત્રિજ્યાઓનો સંબંધ બતાવવો. આથી વિદ્યાર્થીઓને પાકું જ્ઞાન થશે. તેજ પ્રમાણે સ્વીકૃત પક્ષો અને પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો સમજાવવાં.

આકૃતિઓ નિશાળીઆ લગભગ ખરી અને ઝડપથી કાઢી શકે એવો મહાવરો કરાવવો.

દરેક પ્રતિજ્ઞા શીખવતી વખત પ્રથમ તેનો ઉપન્યાસ શુંછે અને સિદ્ધ કરવાની બાબત શીછે એ બે બાબતો જૂદી પાડી વિદ્યાર્થિઓને પાકી સમજાવવી.

પ્રતિજ્ઞાઓ સિદ્ધ કરવામાં બાજુઓ અને ખૂણાઓનું સમાન પણું બતાવવાને અક્ષરોથી બોલી કે લખી બતાવવાની રીત છે. પણ શીખવતી વખતે નિશાળીઆઓ આગળ, મોઢે સિદ્ધ કરી બતાવવામાં શિક્ષકે સમાન પણું બતાવવાને એક સરખા આંકડા લેવાથી નિશાળીઆના લક્ષમાં બહુ તાજું યાદ રહેશે જેમકે, પહેલી પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં **अक** તથા **अव** બાજુ બરાબર થઇ એ યાદ રહેવાને એ બંને બાજુ ઉપર એકડો * લખવો તેમજ **अव** તથા **वक** બાજુઓ બરાબર બતાવવાને તેમાં પણ એકડોજ મૂકવો. એટલે, એ ત્રણે બાજુઓ અરસ્પરસ બરાબર છે એ સ્મૃતિમાં તાજું રહેશે. આ પ્રમાણે આંકડાનો ઉપયોગ વિચાર કરી ઠેકાણે ઠેકાણે કરવો.

ચોપડીમાં લખ્યા છે તે શિવાય બીજા અક્ષરો લેઇને અગર આંકડા લઈને કે, અક્ષરો કાઢી નાંખીને, નિશાળીઆઓ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરે એવી શિક્ષકે ટેવ પાડવી.કેમકે, તેના તેજ અક્ષરો હમેશાં રાખવાથી નિશાળીઆ ગોખણજી બની જાયછે. પાકું સમજતા નથી અને પરીક્ષામાં નાપાસ થાયછે. માટે, આ બાબત શિક્ષકોએ **અવશ્ય લક્ષમાં** રાખવાની છે.

વળી, પ્રમેયસિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવા સારૂ કાગળના કે લૂગડાના કડકાના તેવા આકારો બનાવી અગર લાકડાના આકારો હોય તો તેમાં ઉપન્યાસમાં કહેલી અને સિદ્ધ કરવાની કે સિદ્ધ કરેલી બાબતો પ્રત્યક્ષ બતાવી શિક્ષકે ખાત્રી કરાવવી.

થોડી એક પ્રતિજ્ઞાઓ એવી છે કે જેના ઉપન્યાસમાં ‡ બબ્બે બાબતો બીલકુલ સ્વતંત્ર આપેલી છે; તેમજ કેટલીક પ્રતિજ્ઞાઓમાં બબ્બે ત્રણ ત્રણ બાબતો સિદ્ધ × કરવાની આવેછે; કે, જો, તેઓને જુદી પાડીને લખે તો, ખરેખર જુદી જુદી પ્રતિજ્ઞાઓ થાય. પણ તેમ કરવાથી બહુ લંબાણ થઈ જાય માટે, એકજ પ્રતિજ્ઞાઓમાં સંબંધ રાખતી બાબતો મૂળ ગ્રંથકારે એકઠી ગોઠવી છે. એવી બાબતો પાકી સમજાય, અને શીખનાર તથા શીખવનારને ગુંચવણ ન પડે માટે, આ પુસ્તકમાં નંબર પાડી એવી બાબતો એવી પ્રતિજ્ઞાઓમાં જુદી બતાવી છે. માટે શિક્ષકે એવા જૂદા જૂદા કડકા બરાબર સમજાવી તેમને એકઠા કરી છેવટે આખો સિદ્ધાંત જોડાવવો. અગર વખત મળે તો દરેક કડકો જુદે જુદે દહાડે શીખવવો. ભૂમિતિ શીખવવાનો વખત એકાંતરે રાખવો એ બસ છે.

આ વિષયમાં નવી શીખવવાની બાબત પાછળ શીખેલી બાબત ઉપર બહુ આધાર રાખેછે. માટે, દરેક બાબત પાકી થયા શિવાય આગળ નવી બાબત શરૂ કરવી નહિ. એટલે **પેહેલેથીજ પાકું શીખવો.**

---

* બગડો અગર પાંચડો કે સાતડો ગમે તે **સમાન** આંકડો લખો.

‡ ૫, ૨૮, પ્રતિજ્ઞા જુઓ.

× ૪, ૨૧, ૨૬, ૨૯, ૩૨, ૩૩, ૩૪ પ્રતિજ્ઞા જુઓ.

શુદ્ધિપત્ર.

પૃષ્ઠ.	સ્થળ.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
૨	૧૯ મી વ્યાખ્યાની આકૃતિમાં.	ઉપલા ભાગમાં કાંઈ લખ્યું નથી.	ખંડ.
૩	૨૪ મી ,, ,,	ત્રિકોણની એક બાજું ઉપર આંકડો ભર્યો નથી.	૫
૪	૩૦ મી ,, ,,	સમાંતર સમબાજુ ચો-ખૂણાની એક બાજુ ઉ-પર આંકડો ભર્યો નથી.	૮
૫	ટિકામાં છેલ્લી લીટી.	ત ભૂ. ફૃ. મ.	ત ભૂ. ફૃ. પ્ર.
૧૨	૫મી પ્રતિજ્ઞાની ૭મી લીટી.	(૨સ્ત્રી. પ્ર.)	પાંચમી પ્રતિજ્ઞાની પહેલી બાબત એકજ સિદ્ધ કરવી હોય તો, આ ઠેકાણે (૨-સ્વી. પ્ર.) એમ જોઇએ પણ બીજી બાબત સિદ્ધ કરવી હોયતો જરૂર નથી. કેમકે, ઉપન્યાસમાંજ બા-જુઓ વધારવાનું આપેલુંછે.
૨૫	૯ મી લીટી.	સાંધો.	વધારો.
૪૧	૩૫ મી પ્રતિજ્ઞાની ૧ લીટી.	અકજ.	એકજ
૪૨	૩૬ પ્રતિજ્ઞાની ૧લીટી.	(त्रर्क तथा इह)	(त्रक तथा ईह)

— ❧ —

ભૂમિતિનાં મૂળતત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

ભૂમિતિ*=(ભૂ-પૃથ્વી+મા-માપવું+તિ-પણું) પૃથ્વી (જમીન) ની માપણીની વિદ્યા. પણ, હાલ તો આકારના ગુણોનું શાસ્ત્ર એ અર્થમાં વપરાયછે.

શીખવાના ફાયદા:-૧ તર્ક, તોલન અને સ્મરણાદિ શક્તિઓ પ્રબળ થાયછે. ૨ જમીન અને પર્વતોની માપણી કરવામાં અને આકાશી પદાર્થોનાં અંતર જાણવામાં મદદ મળેછે. ૩ મનને આનંદ થાયછે.

વ્યાખ્યાઓ.

૧. बिंदु તેજ, જેને સ્થિતિમાત્ર છે; પણ ભાગો નથી.

૨. लीटी તેજ, જેને માત્ર લંબાઈ છે; પણ પહોળાઈ નથી. બિંદુઓને સાંધવાથી લીટી થાયછે.

૩. લીટીના છેડાઓ બિંદુ હોયછે.

૪. सीधीलीटी તેજ, જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોયછે.

૫. सफाई તેજ, જેને લંબાઈ તથા પહોળાઈ માત્ર હોયછે.

૬. સફાઇના છેડાઓ લીટીઓ હોયછે.

૭. सपाट सफाई તેજ, જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોયછે.

૮. समतल खूणो તેજ, જે એક સફાઇમાં એકઠી મળેછે, પણ એકજ દિશામાં નથી; એવી બે લીટીઓનો પરસ્પરનો ઝોક (વલણ) છે.

૯. समतल सीधी लीटी खूणो તેજ, જેઓ એકઠી મળેછે પણ એકજ સીધી લીટીમાં નથી, એવી બે સીધી લીટીઓનો પરસ્પરનો ઝોક છે. (નીચે પ્રમાણે તેના ત્રણ પ્રકાર છે.)

૧૦. (૧) काटखूणो જ્યારે એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી ઉપર (એકે તરફ નમ્યા વગર) પડીને, પાસપાસેના ખૂણા બરાબર કરેછે. ત્યારે, આ ખૂણાઓ માંહેલા પ્રત્યેકને કાટખૂણો કહેછે. અને આ લીટીઓ માંહેલી પ્રત્યેક બીજી ઉપર લંબ છે એવું કહેવાય છે.

---

* આ વિદ્યાનો પ્રથમ ગ્રીસ દેશમાં શોધ થયોછે.

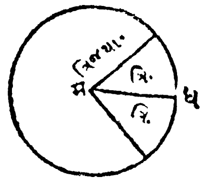
૧૧. (૨) **પહોળો ખૂણો** તેજ, જે કાટખૂણા કરતાં મોટો હોયછે.

૧૨. (૩) **સાંકડો ખૂણો** તેજ, જે કાટખૂણા કરતાં નાનો હોયછે.

૧૩. **સીમા** અથવા **મર્યાદા** તેજ, જે કોઈ વસ્તુનો છેડો.

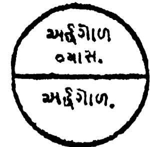
૧૪. **આકૃતિ** તેજ, જે સફાઇની હદ સઘળી તરફથી એક અથવા વધારે લીટીઓથી થએલી છે.

૧૫. **ગોળ** તેજ સપાટઆકૃતિ કે, જેની હદ એક અખંડ લીટીથી થએલી છે. અને તે અખંડ લીટીને તેનો **ઘેર** અથવા **પરિઘ** કહેછે. ગોળમાં એવું એક મુકરર બિંદુ છે કે, જેમાંથી તેના પરિઘ સુધી દોરેલી સઘળી લીટીઓ અરસ્પરસ બરાબર છે.



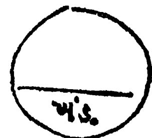
૧૬. આ બિંદુ (જેમાંથી બરાબર લીટીઓ દોરીછે) ને **ગોળનું મધ્યબિંદુ** કહેછે. મધ્યબિંદુથી પરિઘ સુધી દોરેલી લીટીને **ત્રિજ્યા** કહેછે. (જુઓ ઉપલી આકૃતિ)

૧૭. **ગોળનો વ્યાસ** તેજ સીધી લીટી, જે મધ્યબિંદુની પાર દોરેલી અને જેના છેડા બંને તરફ પરિઘમાં હોયછે. (ત્રિજ્યાથી વ્યાસ બમણો છે.)



૧૮. **અર્દ્ધગોળ** તેજ આકૃતિ કે, જેની હદ વ્યાસથી તથા વ્યાસથી કપાએલા ગોળના ભાગથી થયેલી છે. (ઉપલી આકૃતિ જુઓ.)

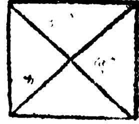
૧૯. **ગોળનો ખંડ** તેજ આકૃતિ કે, જેની હદ એક સીધા લીટીથી તથા તેનાથી કપાયેલા પરિઘના ભાગથી થયેલી છે.



૨૦. **સીધીલીટીઆકૃતિ** તેજ કે, જે આકૃતિની હદ માત્ર સીધી લીટીઓથી થયેલી હોયછે. (નીચે પ્રમાણે તેના ત્રણ પ્રકાર છે.)

૨૧. (૧) **ત્રિકોણ** તેજ સીધીલીટીઆકૃતિ કે, જેની હદ ત્રણ બાજુઓથી થયેલી છે.

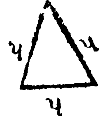
૨૨. (૨) **ચૌખૂણાકૃતિ** તેજ, જેની હદ ચાર બાજુઓથી થયેલી છે;
ચોખૂણાકૃતિના સામસામેના—પાસપાસેના નહિ—ખૂણાઓનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓને તેની **કર્ણલીટીઓ** કહેછે.



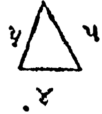
૨૩. (૩) **બહુખૂણ** તેજ, સીધીલીટીઆકૃતિ કે, જેની હદ ચાર કરતાં વધારે બાજુઓથી થયેલી છે. ખૂણાની સંખ્યા પ્રમાણે તેને પંચખૂણ, ષટ્ખૂણ, સપ્તખૂણ ઇત્યાદિ પણ કહેછે.

ત્રિકોણો.

૨૪. (૧) **સમબાજુ ત્રિકોણ** તેજ કે, જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ બરાબર છે.



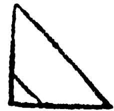
૨૫. (૨) **સમદ્વીબાજુ ત્રિકોણ** તેજ કે, જે ત્રિકોણની માત્ર બેજ બાજુઓ બરાબર છે.



૨૬. (૩) **વિષમબાજુ ત્રિકોણ** તેજ કે, જે ત્રિકોણની કોઇ પણ બે બાજુઓ બરાબર નથી.



૨૭. (૪) **કાટખૂણ ત્રિકોણ** તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં એક ખૂણો કાટખૂણો છે. કાટખૂણાની સામેની બાજુને **કર્ણ** કહેછે.



૨૮. (૫) **પહોળખૂણ ત્રિકોણ** તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં એક પહોળો ખૂણો છે.



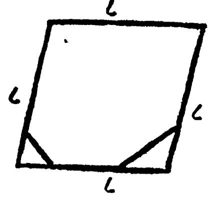
૨૯. (૬) **સાંકડખૂણ ત્રિકોણ** તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં ત્રણે સાંકડા ખૂણા છે.



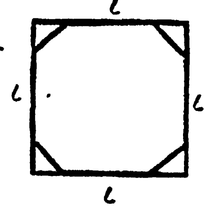
ચોખૂણ.

૨૯. (अ) **समांतरबाजुचोखूण*** તેજ, ચોખૂણાકૃતિ કે,જેની બંને તરફની સામસામેની બાજુઓ સમાંતર છે.(તેના નીચે પ્રમાણે ચાર પ્રકાર છે.)

૩૦. (૧) **समांतर समबाजु चोखूण**, જે ચોખૂણાકૃતિની ચારે બાજુઓ બરાબર છે; પણ ખૂણા બરાબર નથી. તેને **लॉझॅंज** અથવા **रॉम्बस** પણ કહેછે.

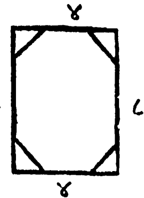


૩૧. (૨) **चोरस**, જે ચોખૂણુની ચારે બાજુઓ બરાબર છે અને ચારે ખૂણા કાટખૂણા (બરાબર) છે. અથવા સમખૂણુ લૉઝૅંજને ચોરસ કહેછે.

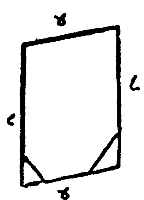


(ઉપરની બંને વ્યાખ્યાઓમાં માત્ર ખૂણાઓનોજ તફાવત છે.)

૩૨. (૩) **दीर्घसमखूणचोखूण**, જે ચોખૂણુની સામસામેની બાજુઓ બરાબર પણ પાસપાસેની બાજુઓ બરાબર નથી; અને સઘળા ખૂણા કાટખૂણા છે. એને **काटखूण चोखूण** અથવા **लंबचोरस** પણ કહેછે.



૩૩. (૪) **दीर्घविषमखूणचोखूण**, જે ચોખૂણુની સામસામેની બાજુઓ બરાબર છે, પણ પાસપાસેની બાજુઓ બરાબર નથી; અને ખૂણા કાટખૂણા નથી. એને **रॉम्बाईड** પણ કહેછે.



(ઉપરની બંને વ્યાખ્યાઓમાં માત્ર ખૂણાઓનોજ તફાવત છે.)

---

*પાંત્રીશમી વ્યાખ્યા પ્રથમ સમજાવ્યા પછી આ અને નીચેની વ્યાખ્યાઓ સમજાવવી. મૂળ ગ્રંથના ક્રમને વળગી રહેવા અહીં વ્યાખ્યાઓનો ક્રમ ફેરવ્યો નથી.

☞ ત્રિકોણુ અને ચોખૂણુના જૂદા જૂદા પ્રકાર સમજવાને આકૃતિની બાજુઓમાં આંકડા મૂકેલા છે. અને જરૂર છે ત્યાં ખૂણાઓમાં પણ નિશાની કરી છે.

૩૪. બીજી સઘળી ચોખૂણાકૃતિઓને चतुःसीमा (त्रापीज्यम*) કહેછે.

૩૫. समांतर* सीधी लीटीओ તેજ, જે લીટીઓ એકજ સફાઇમાં છે. અને તેમને બંને દિશામાં ગમે તેટલી વધારીએ તોપણ કદિ મળે નહિ.

સ્વીકૃત પક્ષો.

એવું સ્વીકારેલું (કબૂલ રાખેલું) છે કેઃ—

૧. કોઇપણ એક બિંદુથી કોઈપણ બીજા બિંદુસુધી એક સીધી લીટી દોરી શકાય છે.

૨. અંતવાન સીધી લીટી ગમે તેટલી લંબાઈ સુધી એક સીધી લીટીમાં વધારી શકાયછે.

૩. કોઇપણ મધ્યબિંદુ ધારીને તે મધ્યબિંદુથી કોઇપણ અંતરે એક ગોળ દોરી શકાયછે.

પ્રત્યક્ષ (ખુલ્લાં) પ્રમાણો.

૧. જે પરિમિતો×—માપઅથવાઆકૃતિ—એકજ પરિમિતની બરાબર છે, તેઓ અરસ્પરસ બરાબર છે.

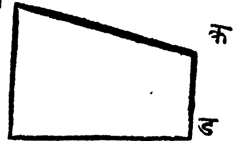
૨. જો સમપરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવ્યાં તો, સર્વાળો સમ થશે. જેમકે, ૧૫, ૧૫ તેમાં ૫, ૫ મેળવ્યાં તો સર્વાળો ૨૦, ૨૦ થશે.

૩. જો સમપરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કીધાં તો, બાકી સમ રહેશે. જેમકે ૧૫, ૧૫ તેમાંથી ૫, ૫ બાદ કરીએ તો બાકી ૧૦, ૧૦.

૪. જો વિષમ પરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવ્યાં તો, સર્વાળો વિષમ થશે. જેમકે, ૧૫, ૨૦ તેમાં ૪, ૪ મેળવ્યા તો ૧૯, ૨૪.

---

* એક તરફની સામસામેની (अ ब તથા क ड) બે બાજુઓની જોડ સમાંતર પણ બીજી તરફની સામસામેની (ब क તથા अ ड) બે બાજુઓની જોડ સમાંતર નહિ એવા ચોખૂણને त्रापीझोईड કહેછે. એનો ત્રાપીજ્યમમાં સમાવેશ થાય છે.



* ઓછામાં ઓછી બે લીટીઓ હોય ત્યારે એક બીજી સાથે સમાંતર થઈ શકે.

× પરિમિત=(પરિ—ચોતરફ+મા—માપવું+ત. ભૂ. કૃ. પ્ર.) ચોતરફનું માપ.

૫. જો વિષમ પરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કીધાં તો, બાકી વિષમ રહેશે. જેમકે, ૨૦, ૨૫ માંથી ૫, ૫ બાદ કરીએ તો ૧૫, ૨૦.

૬. એકજ અથવા બરાબર પરિમિતોની બમણાઇઓ બરાબર છે.

૭. એકજ અથવા બરાબર પરિમિતોનાં અર્દ્ધા બરાબર છે.

૮. જે પરિમિતો અરસ્પરસ મળી જાયછે, અથવા એકજ અવકાશની માંહે બરાબર માઈ રહેછે, તેઓ બરાબર છે.

૯. આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું છે.

૧૦. બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.

૧૧. સઘળા કાટખૂણા બરાબર હોયછે.

૧૨.* જો બે (अ ब તથા क ड) સીધી લીટીઓને એક (ई फ)સીધી લીટી એવી રીતે છેદે કે, તેની એક બાજુના (ब ई फ તથા ड फ ई) માંહેના ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થાય, તો જે બાજુ ભણી બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા ખૂણા છે તે બાજુ ભણી એ બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો, તેઓ મળશે. પણ જો તે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર હોય અથવા તે કરતાં વધારે હોય તો, તે તરફ તે બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો કદિ મળશે નહિ.

અઘરા શબ્દના અર્થ.

૧. **પ્રતિજ્ઞા**—ભૂમિતિમાં તર્ક કર્યાથી જે પરિણામો નીકળેછે તે.

૨. પ્રતિજ્ઞાઓ બે જાતની છે. ૧ કૃત્ય. ૨ પ્રમેય.

૩. **કૃત્ય**—જેમાં કાંઈ કરવાનું કહેલું છે. જે માગેલું હોય તે આંકણી તથા કંપાસની મદદથી શી રીતે થઈ શકે, તે બતાવવું તે કૃત્યનું **સાધન** છે. સાધનમાં દેખાડેલી રીતથી માગેલું પરિણામ બરાબર મળેછે કે નહિ તે સિદ્ધ કરવું એજ કૃત્ય સિદ્ધાંતોમાં **સિદ્ધતા** છે.

૪. **પ્રમેય**—જેમાં કાંઈ તત્વની સત્યતા કહેલી છે તે. જે પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો અને વ્યાખ્યાઓ અથવા તે પ્રમેયની પૂર્વે અને તેના ઉપર આધાર ન રાખતાં સિદ્ધ કીધેલી બીજી સત્યતાઓમાંથી કહેલા તત્વની સત્યતા કેવી રીતે નીકળી શકે, તે બતાવવું એ પ્રમેય સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધતાનો વિષય છે.

---

* આ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ અઠ્ઠાવીશમી પ્રતિજ્ઞા શીખવતાં સુધી સમજાવવાની જરૂર નથી.

૫. કૃત્ય પ્રતિજ્ઞા સ્વીકૃતપક્ષ જોડે અને પ્રમેય પ્રતિજ્ઞા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ જોડે સંબંધી છે.

૬. **સ્વીકૃત પક્ષ**—જે કૃત્યનું સાધન સ્વીકારેલું છે.

૭. **પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ**—જે પ્રમેયની સત્યતા સિદ્ધતાવિના કબૂલ રાખેલીછે.

૮. **આકૃતિ રચના**—પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવાને વાસ્તે તે પ્રતિજ્ઞાનાજ સમુદાહરણમાં જે લીટીઓ ખરેખરી કહેલી છે; તે વિના બીજી લીટીઓ ઘણીવાર દોરવી પડેછે. આવી લીટીઓ દોરવી તેને આકૃતિ રચના કહેછે.

૯. **અનુમાન**—જે પ્રતિજ્ઞા ઉપરથી સહેજ નીકળેછે તે.

૧૦. **ટિકા**—પ્રતિજ્ઞા ઉપરની ચર્ચા, તે અનુમાન કહેવાય નહિ.

૧૧. **પૂર્વ સિદ્ધાંત**—જે પ્રતિજ્ઞા કોઈ વધારે અગત્યની પ્રતિજ્ઞા સ્થાપન કરવાને વાસ્તે માત્ર લખેલી હોયછે તે. જેમકે, સાતમી પ્રતિજ્ઞા ફકત આઠમી પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવા સારૂ લખેલી છે.

૧૨. **ઉપન્યાસ**—ધારેલી વાત. એટલે, પ્રતિજ્ઞાના સમુદાહરણમાં જે ભાગમાં કાંઈ વસ્તુ સાચી આપેલી છે એમ ધારેલું છે. અને જે ઉપરથી કહેલી અનુમિતિ કાઢવાની છે.

પ્રતિજ્ઞા લખવાની રીતિ.

પ્રથમ પ્રતિજ્ઞાનો નંબર અને જાત, પછી મથાળું; કૃત્ય હોય તો સાધન અને પછી સિદ્ધતાનો વિષય આવે. બિંદુ એક અક્ષરથી, લીટી બે અક્ષરથી અને ખૂણો ત્રણ અક્ષરથી અગર એક અક્ષરથી બતાવાયછે. ખૂણાને વાસ્તે ત્રણ અક્ષર લીધા હોય ત્યારે, મથાળાનો અક્ષર વચ્ચે આવવો જોઇએ. ત્રિકોણ ત્રણ અક્ષરથી, ચોખૂણ સામસામેના—કર્ણના છેડાના—બે અક્ષરથી અને બહુખૂણ ઘણા અક્ષરોથી બતાવાય છે. તેમજ ગોળને વાસ્તે પરિધમાં ત્રણ અક્ષર લેવાની રીત છે.

અંગ્રેજી મૂળાક્ષરનો ક્રમ अ, ब, क, ड, ई, फ, ग, ह, ऐ વગેરે છે. માટે, એ અક્ષરો બાળબોધમાં લખીને સંજ્ઞા આપી છે.

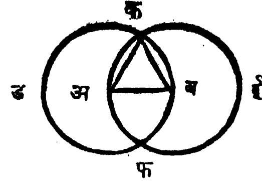
પ્રતિજ્ઞા ૧ લી કૃત્ય.

કોઈ આપેલી (अ ब) અંતવાનસીધીલીટી ઉપર એક સમબાજુ ત્રિકોણ કરવાનું.

સાધન

अ મધ્યબિંદુ ધારીને अ ब ત્રિજ્યાએ (૩ સ્વી. પ્ર.) बकड ગોળ

દોરો; તેમજ ब મધ્યબિંદુ ધારીને ब अ ત્રિજ્યાએ બીજું अ क ई ગોળ દોરો. આ ગોળાના क છેદન બિંદુથી આપેલી સીધી લીટીના अ તથા ब છેડા સુધી (૧ સ્વી. પ્ર.) સીધી લીટીઓ દોરો. ત્યારે જે સમબાજુ ત્રિકોણ કરવો હતો તે अ क ब ત્રિકોણ થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, अ क તથા अ ब લીટીઓ એકજ ब क ड ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે માટે તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને ब क તથા ब अ એકજ अ क ई ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે માટે, તેઓ પણ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, ब क તથા अ क લીટીઓ એકજ अ ब લીટીની બરાબર થઈ તેથી, (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) તેઓ ત્રણે અરસ્પરસ બરાબર છે. એટલે, अ ब क ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ બરાબર છે. માટે, (૨૪ વ્યા. પ્ર.) તે સમબાજુ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ.

૧. અંતવાન સીધી લીટી ઉપરજ સમબાજુ ત્રિકોણ થાય. અમિત કે અનંત લીટી ઉપર થાય નહિ કેમકે તેનું માપ નથી.

૨. પ્રત્યેક ગોળ બીજા ગોળના મધ્યબિંદુમાં થઇને જાયછે; તેથી તેના પરિધનો એક ભાગ બીજા ગોળની માંહે અને બીજો ભાગ બીજા ગોળની બહાર પડવો જોઇએ. તેથી બંને ગોળો છેદાવાજ જોઇએ.

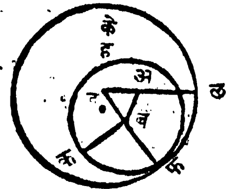
૩. આપેલી લીટીની બંને તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કરી શકાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨ જી કૃત્ય.

કોઈ આપેલા (अ) બિંદુથી, એક આપેલી (ब क) અંતવાનસીધી-લીટીની બરાબર એક સીધી લીટી દોરવાનું.

સાધન.

આપેલા (अ) બિંદુથી આપેલી અંતવાન સીધી લીટી (ब क) ના એક ब છેડા સુધી (૧ સ્વી. પ્ર.) એક સીધી લીટી દોરો. અને अ ब લીટી ઉપર એક अ ड ब સમબાજુ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. ब મધ્ય બિંદુથી ब क ત્રિજ્યાએ એક क ह फ ગોળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દોરો. આ ગોળના પરિધને फ આગળ મળે ત્યાં સુધી



डत्र ने (२ स्वी. प्र.) वधारेा. अने ड मध्य बिंदुथी डफ त्रिज्याએ બીજું फलके ગેાળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દેારેા. આ ગેાળના પરિધને ल આગળ મળે ત્યાં સુધી डअ લીટીને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારેા.એટલે દેારવાની લીટી अल લીટી થશે.

સિદ્ધતા.

કેમકે, डल તથા डफ લીટીએા એકજ फलके ગેાળની ત્રિજ્યાએા છે તેથી (૧૫ વ્યા. પ્ર.) તેએા બરાબર છે. વળી डअ તથા डत्र લીટીએા बडअ સમબાજુ ત્રિકેાણની બાજુએા છે. તેથી (૨૪ વ્યા. પ્ર.) તેએા પણ બરાબર છે. પહેલી કહેલી બે डल તથા डफ બરાબર લીટીએામાંથી આ डअ તથા डत्र બરાબર લીટીએા બાદ કરીએ તેા, બાકી अल તથા बफ (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. પણ बफ તથા बक એકજ कहफ ગેાળની ત્રિજ્યાએા છે તેથી, તેએા (૧૫વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, अल તથા बक બંને પ્રથક પ્રથક बफ ની બરાબર છે તેથી, (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) તેએા અરસ્પરસ બરાબર છે. માટે, बक ની બરાબર अल લીટી છે અને તે કહેલા अ બિંદુથી દેારેલ છે.

૧ આપેલા બિંદુને આપેલી સીધી લીટીના એક છેડા સાથે સાંધવું. તે છેડાને સંધાએલેા છેડેા અને સાંધનારી લીટીને સાંધનારી લીટી કહેવી.

૨ સાંધનારી લીટીની કેાઇપણ એક બાજુએ સમબાજુ ત્રિકેાણ કરવેા.

૩ પહેલા (નાના) ગેાળનું મધ્યબિંદુ સંધાએલેા છેડેા થાય અને આપેલી લીટી તે ગેાળની ત્રિજ્યા થવી જોઇએ.

૪ આપેલા બિંદુની સામેની બાજુએ સમબાજુ ત્રિકેાણની જે બાજુ હેાય, તે બાજુને આપેલી લીટીના સંધાએલા છેડાની પાર નાના ગેાળના પરિધને મળતાં સુધી વધારવી જોઇએ.

૫ સાંધનારી લીટીની સામે ત્રિકેાણનું જે શિરેાબિંદુ છે તે મેાટા ગેાળનું મધ્યબિંદુ લેવું જોઇએ અને ત્યાંથી તે, નાના ગેાળના પરિધને અડતાં સુધી થયેલી લીટીને મેાટા ગેાળની ત્રિજ્યા લેવી જોઇએ.

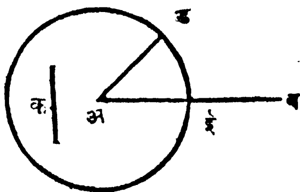
૬ સમબાજુત્રિકેાણની બાકીની બાજુને કહેલા બિંદુની પાર મેાટા ગેાળના પરિધને મળતાંસુધી વધારી તેા, તે વધારેા દેારવાની લીટી થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૩ જી કૃત્ય.

કાંઈ આપેલી (अत्र તથા क) બે સીધી લીટીએામાંની મેાટી (अत्र) માંથી નાની (क) ની બરાબર એક ભાગ કાપવાનું.

સાધન.

મોટીના કોઇપણ अ છેડાથી નાની क ની બરાબર (૨ પ્રતિ. પ્ર.) अड સીધી લીટી દોરો. અને अ બિંદુને મધ્ય બિંદુ ધારીને अड ત્રિજ્યાએ (૩ સ્વી. પ્ર.) એક ગોળ દોરો. ત્યારે આ ગોળથી કપાએલ મોટીનો ભાગ अई નાની क ની બરાબર છે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, अई તથા अड એકજ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને क તથા अड (આકૃ. રચ. પ્ર.) બરાબર છે તેથી अई તથા क (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે.

૧ આપેલી બંને લીટીઓ **અંતવાન** જોઇએ.

૨ નાની લીટીને વધારીને મોટી જેવડી કરવી હોય તો, મોટીને ત્રિજ્યા ધારી. ગોળ દોરવો. પછી ગોળના પરિઘ સુધી નાનીને વધારવી.

પ્રતિજ્ઞા ૪ થી પ્રમેય.

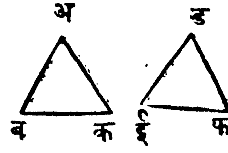
જો, (बअक તથા ईडफ) બે ત્રિકોણોમાં એકની (अब તથા अक) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (डई તથા डफ) બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને તે બાજુઓના (बअक તથા ईडफ) અંતર ખૂણા પણ બરાબર હોય તો, बक તથા ईफ પાયા અથવા બાકીની બાજુઓ બરાબર થશે (૧ બા.*); વળી એક ત્રિકોણના પાયા આગળના (ब તથા क) બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના પાયા આગળના (ई તથા फ) બે ખૂણાઓ જેઓ બરાબર બાજુઓની સામે છે, તેઓની (ब, ई ની તથા क, फ ની) બરાબર થશે (૨ બા.); અને તે ત્રિકોણો પણ બરાબર થશે (૩ બા.).

એ બે ત્રિકોણોને એવી રીતે મૂકો કે, બરાબર ખૂણાઓમાંથી એક

---

* બાબત.

ड ખૂણાનું શિરોબિંદુ બીજા अ ખૂણાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે.* અને કહેલા બરાબર ખૂણાઓની આસપાસની બાજુઓ માંહેલી એક डई, બીજા ત્રિકોણમાં તેની બરાબરની अब બાજુ ઉપર પડે;*



અને अक તથા डफ બરાબર બાજુઓની બાકીની જોડ, अब તથા ड ई જેઓ મળી જાયછે તેઓની એકજ તરફ પડે.*

अ તથા ड શિરોબિંદુઓ તથા अब અને डई બરાબર બાજુઓ મળી જાયછે. તેથી ब તથા ई બિંદુઓ પણ મળી જવાં જોઇએ. જો તેઓ ન મળે અને ઊંચે અગર નીચે પડેતો अब તથા डई બાજુઓ બરાબર થાય નહિ; અને તે ઉપન્યાસથી ઊલટું થાય; માટે ब તથા ई બિંદુઓ મળેછે. વળી, डई બાજુ अब ઉપર પડેછે અને अक તથા डफ બાજુઓ अब ની એકજ તરફ પડેછે. અને बअक તથા ईडफ ખૂણા બરાબરછે તેથી, डफ બાજુ अक ઉપર પડવી જોઇએ. કેમકે, જો ઉપર ન પડતાં માંહે કે બહાર પડે તો, अ તથા ड ખૂણા બરાબર થાય નહિ. એ, ઉપન્યાસથી ઊલટું થાય. માટે, डफ બાજુ अक બાજુ ઉપરજ પડે.

ड फ બાજુ अक ઉપર પડે છે, અને તેઓ બરાબર છે તેથી, फ છેડો क ઉપર પડવો જોઇએ. बक તથા ईफ પાયાઓના છેડા મળી જાયછે તેથી એ પાયાઓ પણ મળી જવા જોઇએ. કેમકે, જો તેઓ નહિ મળેતો, ઉંચે અગર નીચે પડે અને એમ થવાથી તેઓ અવકાશ ઘેરે. એ ૧૦ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણથી ઊલટું થાય. માટે, તે બંને પાયા મળી જાય છે અને તેથી ૮ પ્રત્ય. પ્ર. પ્રમાણે તે બંને બરાબર છેજ. (૧ બા. સિદ્ધથઈ).

વળી, ईड તથા ईफ બાજુઓ અનુક્રમે बअ તથા बक જોડે

---

* પ્રથમ બિંદુ અને બાજુ મૂકવાની છૂટ વગર આધારે લેઈ શકાયછે.

☞ શિક્ષકે કાગળના કડકાના આવાજ બે ત્રિકોણો બનાવી તેમાં આજ બાળબોધ અક્ષરોથી સંજ્ઞા આપી એક ઉપર એક મૂકી બતાવવા તેથી નિશાળીઆને જલદી સમજ પડશે.

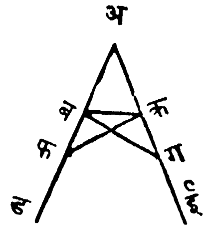
મળી જાયછે. તેથી (૮ પ્રસ. પ્ર.) ई તથા ब ખૂણા બરાબર છે; અને તે-વાજ કારણથી फ તથા क ખૂણાઓ બરાબર છે. (૨ બા. સિદ્ધ થઈ).

હવે, એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ સાથે મળી જાય છે, તેથી તે ત્રિકોણો પણ મળી જાયછે, માટે, તેઓ (૮ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ. (૩ બા.).

પ્રતિજ્ઞા ૫ મી પ્રમેય.

એક (ब अ क) સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણની (अब તથા अक) બરાબર બાજુઓની સામેના (ब તથા क) ખૂણા બરાબર છે (૧ બા.); અને જો બરાબર બાજુઓને ત્રીજી (ब क) બાજુના (ब તથા क) છેડાની પાર વધારી તો તેઓના વધારેલા ભાગો અને ત્રીજી બાજુથી થયેલા (डबक તથા ईकब) ખૂણાઓ પણ બરાબર થશે (૨ બા.).

ત્રીજી બાજુના ब તથા क છેડાઓની પાર अब તથા अक એ બરાબર બાજુઓને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને તે બાજુઓમાંની એકના વધારેલા बड ભાગમાં કોઈ પણ फ બિંદુ લો. અને બીજી બાજુના વધારેલા ભાગમાંથી अफ ની બરાબર (૩ પ્રતિ. પ્ર.) अग કાપો; વધારેલી બાજુઓ ઉપર એવાં લીધેલાં फ તથા ग બિંદુઓને ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુના વ્યુત્ક્રમ છેડાઓ फ,क તથા ब,ग (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



फअक તથા गअब ત્રિકોણમાં अफ બાજુની બરાબર अग (આકૃ. રચ. પ્ર.) રાખેલી છે; અને अक તથા अब (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે; અને अ ખુણો બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે તેથી (૪ પ્રતિ.

☞ આ પ્રતિજ્ઞાની આકૃતિ રચના ગુંચવણ ભરેલી છે કેમકે, એક ત્રિકોણના કેટલાક અવયવો બીજા ત્રિકોણમાં આવેછે; માટે શિક્ષકે કાગળના કડકાના આવડા બે જૂદા જૂદા ત્રિકોણો બનાવી તે ત્રિકોણો એક ઉપર એક કેવી રીતે રહેલા છે તે, તથા તેમાંના સરખા ખૂણા વગેરે અંગો આકૃતિમાં કયાં અને કેવી રીતે રહેલાં છે તે બતાવવાથી વિદ્યાર્થિને જલદી સમજ પડશે.

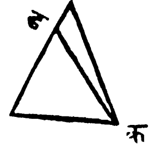
પ્ર.) फक લીટી बग ની, अफक ખૂણેા अगब ખૂણાની અને अकफ ખૂણેા अबग ખૂણાની બરાબર છે.

હવે, अफ તથા अग બરાબર લીટીઓમાંથી अब તથા अक બરાબર બાજુઓ બાદ કીધી તેા, બાકીની बफ તથા कग (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. તેથી, પાયા નીચેના बफक તથા कगब ત્રિકોણેામાંની बफ તથા फक બાજુઓ અનુક્રમે कग તથા गब ની બરાબર છે; અને તે બાજુઓના અંતર ખૂણા फ તથા ग પણ (ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્ર.) બરાબર છે માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) તે ત્રિકોણેામાંની ब फ બાજુ સામેનેા फकब ખૂણેા તે, તેની બરાબરની कग બાજુ સામેના गबक ખૂણાની બરાબર છે; (આ બરાબર ખૂણાઓને अकफ તથા अबग ઉપર કીધેલા બરાબર ખૂણાઓમાંથી બાદ કરીએ તેા બાકી अबक તથા अकब ખૂણાઓ ૩ પ્રત્ય. પ્ર. બરાબર રહેશે. ૧ બા. સિદ્ધ થઈ.) અને फक બાજુ સામેનેા फबक ખૂણેા તે गब બાજુ સામેના गकब ખૂણાની બરાબર છે એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૬ ઠ્ઠી પ્રમેય,

જો, (ब अ क) એક ત્રિકોણના (ब તથા क) બે ખૂણાઓ બરાબર હોય તેા, તેઓની સામેની (अ क તથા अ ब) બાજુઓ પણ બરાબર થશે.*

કેમકે, જો બાજુઓ બરાબર નહિ હોય તેા, ધારેા કે, તેઓ માંહેલી એક अब બીજી अक કરતાં મેાટી છે. માટે, મેાટીમાંથી નાની अक ની બરાબર बड (૩ પ્રતિ પ્ર.) કાપેા. અને कड (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધેા.



ત્યારે, डबक તથા अकब ત્રિકોણેામાં बड બાજુ ब अक ની બરાબર રાખેલી છે. અને बक બંને ત્રિકોણેામાં સાધારણછે. તેથી, बड તથા बक બાજુઓ અનુક્રમે अक તથા कब બાજુઓની બરાબર છે. અને डबक તથા अकब ખૂણા (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર

---

* જે પ્રતિજ્ઞાઓ પૈકી એકમાં આપેલી બાબત બીજીમાં સિદ્ધ કરવી પડે, અને એકમાં સિદ્ધ કરવાની બાબત બીજીમાં આપેલી હોય ત્યારે તેઓ એક બીજીનેા ઊલટ પક્ષ કહેવાય. આ પ્રતિજ્ઞા પાંચમી પ્રતિજ્ઞાનો ઊલટ પક્ષછે.

છે. માટે, डबक तथा अकब ત્રિકોણો પણ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, આખાની સાથે તેનો એક ભાગ બરાબર એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે अ क બાજુ કરતાં अ ब બાજુ **મોટી** નથી તેમ **નાની** નથી તે પણ તેવીજ રીતે સાબિત કરી શકીએ, માટે તે બંને અરસ્પરસ બરાબર છે. એ સિદ્ધ.*

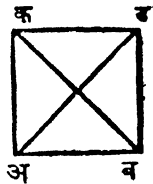
૧ કાપવાનો ભાગ શિરોબિંદુથી ન લેતાં નીચલા બિંદુથીજ લેવો જોઇએ.

૨ મોટી બાજુમાંથી નાની બાજુની બરાબર ભાગ કાપીને જેમ ઉપર પ્રમાણે પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરીછે તેમ નાની બાજુને મોટી બાજુના જેટલી વધારીને પણ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકે. બંનેમાં સરખી સિદ્ધતા લાગુ થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૭ મી પ્રમેય.

એકજ (अब) સીધી લીટી ઉપર અને તેની એકજ બાજુ તરફ જેની સીમાવાસી[1] બાજુઓ (अक તથા अड અને बक તથા बड) બરાબર થાય, એવા (अकब તથા अडब) બે ત્રિકોણો કરી શકાતા નથી.

જો, થઈ શકે તો, તે ત્રિકોણો કરો. અને ધારો કે,(૧)પ્રત્યેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની બહાર પડેછે.



क તથા ड બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર) સાંધો. क-अड ત્રિકોણની अड તથા अक બાજુઓ (ઉપન્યાસપ્ર.) બરાબર છે. તેથી, (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના अकड તથા अडक ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ अकड ખૂણો તેના ભાગ बकड ખૂણા કરતાં (૯ પ્રત્ય.પ્ર.) મોટો છે. તેથી अकड ની બરાબરનો अडक ખૂણો પણ बकड ખૂણા કરતાં મોટો છે. અને આખો बडक ખૂણો

---

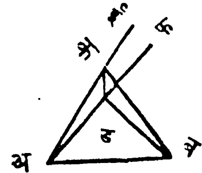
*કોઈ ખરા તત્વને ખોટું ધાર્યાથી કાંઈ સ્પષ્ટ અસંભવિત ફળ નીકળે ને તેથી મૂળના તત્વને ખરૂં માનવું પડે એવી સિદ્ધતાને **ઊલટી સિદ્ધતા** કહે છે. સૂલટી સિદ્ધતાથી ઊલટી સિદ્ધતા ઊતરતી ગણાય છે. **આ પ્રતિજ્ઞા પણ ઊલટી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરેલી છે.**

૧ જે બાજુઓ એકજ બિંદુમાંથી નીકળે છે અને સીમા કરનારીછે તે બાજુઓ.

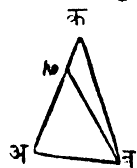
अडक ખૂણા કરતાં (૯ પ્રસ. પ્ર.) મોટોછે. માટે, बडक ખૂણો बकड ખૂણા કરતાં તો **ઘણોજ મોટો** છે. હવે, कबड ત્રિકોણમાં बक તથા बड બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, बडक તથા बकड ખૂણા (૫ પ્રતિ પ્ર.) બરાબર છે. પણ, बडक ખૂણો बकड ખૂણા કરતાં ઘણોજ મોટો છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે, એ અસંભવિત છે. માટે, એકજ સીધી લીટી ઉપર કીધેલા બે ત્રિકોણો માંહેલા પ્રત્યેકનું શિરોબિંદુ જ્યારે બીજા ત્રિકોણની બહાર પડેછે, ત્યારે **તેઓની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર થઈ શકતી નથી.**

૨ જો પ્રકાર. ધારો કે, એક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ ड બીજા ત્રિકોણની માંહે પડેછે; ત્યારે, अक તથા अड બાજુઓ (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો અને कड (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

कअड ત્રિકોણની अक તથા अड બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. તેથી તે ત્રિકોણના પાયાની બહારના ईकड તથા फडक ખૂણા (૫ પ્રતિ પ્ર.) બરાબર છે. પણ ईकड ખૂણો તેના ભાગ बकड ખૂણા કરતાં (૯ પ્રસ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, ईकड ખૂણાની બરાબરનો फडक ખૂણો પણ बकड ખૂણા કરતાં મોટોછે. અને फडक ખૂણા કરતાં बडक ખૂણો (૯ પ્રસ. પ્ર.) **મોટો** છે. માટે बडक ખૂણો बकड ખૂણા કરતાં તો **ઘણોજ** મોટો છે. હવે कबड ત્રિકોણમાં बक તથા बड બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબરછે. માટે, बडक તથા बकड ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર) બરાબર છે; પણ बडक ખૂણો बकड ખૂણા કરતાં ઘણોજ મોટોછે એવું ઉપર સિદ્ધ કીધું છે. એ અસંભવિત છે; માટે એકજ સીધી લીટી ઉપર કીધેલા ત્રિકોણો માંહેલા એકનું શિરોબિંદુ જો બીજાની માંહે હોય તો તેઓના **સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર થઈ શકતી નથી.**



૩ જો પ્રકાર. ધારો કે, એક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ ड બીજા ત્રિકોણની अक બાજુ ઉપર પડેછે ત્યારે એ સ્પષ્ટ છે કે, अक તથા अड બાજુઓ (૯ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર નથી.

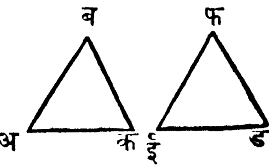


માટે, કોઈ પણ પ્રકારમાં **જેની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર છે એવા બે ત્રિકોણો કહેલી લીટીની એકજ બાજુએ કરી શકાશે નહિ.**

પ્રતિજ્ઞા ૮ મી પ્રમેય.

જો, (अब क तथा ईफड) બે ત્રિકોણોમાં એકની (अब તથા बक) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (ईफ તથા फड) બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને (अक) પાયો પણ (ईड) પાયાની બરાબર હોય તો; બરાબર બાજુઓથી થયેલા ब તથા फ અંતરખૂણા બરાબર થશે.

કેમકે, अबक ત્રિકોણ ઉપર ईफड ત્રિકોણને એવી રીતે મૂકો કે, अ બિંદુ ઉપર ई બિંદુ પડે, અને अक પાયા ઉપર ईड પાયો પડે, તેથી क અને ड બિંદુઓ મળી જશે. જો એ બે બિંદુઓમાંથી એક બિંદુ બીજાની બહાર કે માંહે પડે તો, પાયા બરાબર નહિ થાય અને એ ઉપન્યાસથી ઉલટું થશે માટે क અને ड બિંદુઓ મળી જશેજ.



હવે, બંને ત્રિકોણોમાં શિરો બિંદુઓ પાયાની એકજ તરફ પડે, અને अब તથા ईफ અને बक તથા फड બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય તો फ શિરોબિંદુ ब શિરોબિંદુ ઉપરજ પડવું જોઇએ. કેમકે, જો તેમ ન પડે તો, તે બંને જૂદાં જૂદાં પડે; એ, ૭ મી પ્રતિજ્ઞાથી ઉલટું થાય. માટે अब તથા बक બાજુઓ ईफ તથા फड બાજુઓની સાથે મળી ગઈ. તેથી, તેની વચ્ચેના अबक તથા ईफड ખૂણા (૮ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧ આ પ્રતિજ્ઞામાં માત્ર અંતરખૂણા બરાબર કર્યા છે. પરંતુ પછી ચોથી પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બાકીના ખૂણાઓ તથા બંને ત્રિકોણો બરાબર થાય.

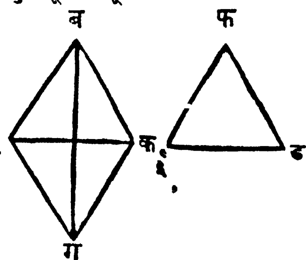
(બીજી રીતે) આ પ્રતિજ્ઞા નીચે પ્રમાણે પણ સિદ્ધ થઈ શકેછે.

ત્રિકોણના પાયા (अक અને ईड) ઉપરાઉપરી પડે, બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય, અને ત્રિકોણો વિરૂદ્ધ બાજુએ પડે.

ત્યારે, बग શિરોબિંદુઓને સાંધે એવી बग સીધી લીટી (૧ સ્ત્રી.પ્ર.) દોરો. (તેથી આકૃતિ રચના નીચે પ્રમાણે ત્રણ જૂદી જૂદી રીતે થશે.)

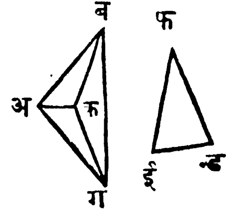
૧ લું ધારો કે, बग લીટી પાયાને છેદેછે.

હવે, ईफड ત્રિકોણ તે अगक ત્રિકોણ થયો. તેથી, फ શિરોબિંદુ ग આગળ, ईफ બાજુ તે अग સ્થળે અને डफ તે कग સ્થળે પડેછે. बअ તથા ईफ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, बअ તથા अग

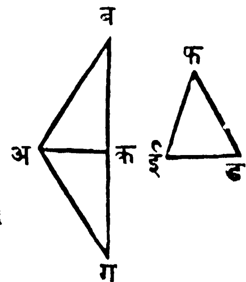


બરાબર છે. તેથી गअव ત્રિકોણ (૨૫ વ્યા. પ્ર.) સમદ્વીબાજુ ત્રિકોણ થયો. માટે, તેના अवग તથા बगअ ખુણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ बक તથા फड (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને फड ની બરાબર गक છે માટે, गकव ત્રિકોણમાં बक તથા गक બાજુઓ બરાબર થઈ. તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમદ્વીબાજુ ત્રિકોણ થયો. માટે, તેના गवक તથા कगव ખૂણાઓ પણ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. આ બરાબર ખૂણાઓ પહેલા બરાબર કરેલા ખૂણાઓ સાથે મેળવ્યા તો, આખા अवक તથા अगक ખૂણાઓ (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થશે. અને अगक ખૂણો તે, ईफड ખૂણાની બરાબર છે તેથી अवक તથા ईफड ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૨ જું ધારો કે, बग લીટી મળી ગયેલા પાયાની બહાર પડેછે. ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે गअव સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણ છે. તેથી, गवअ તથા बगअ ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને માંહે નો गकव ત્રિકોણ પણ સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણ છે. તેથી, गवक તથા कगव ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. આ બંને બરાબર ખૂણાઓ પહેલા બરાબર કરેલા ખૂણાઓમાંથી બાદ કરો તો, બાકી अवक તથા अगक ખૂણાઓ, (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. અને अगक ખૂણો એ ईफड ખૂણાની બરાબર છે તેથી अवक તથા ईफड ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.



૩ જું ધારો કે, बग લીટી પાયાના કોઇપણ એક છેડાની પાર જાયછે. बक તથા कग લીટીઓ (૧૦ પ્રત્ય. પ્ર.) बग સાથે મળી જવી જોઇએ. અને गअव સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણછે તેથી પાયા આગળના व તથા ग ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર થશે. અને ग ખૂણો તે फ ખૂણાની બરાબર છે તેથી व તથા फ ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા એ સિદ્ધ.

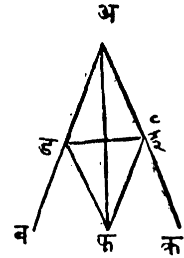


પ્રતિજ્ઞા ૯ મી કૃત્ય.

કોઈ આપેલા (बअक) સીધી લીટી ખૂણાને દુ*ભાગવાનું.

સાધન.

अब બાજુમાં કોઈ પણ ड બિંદુ લો. અને अक માંથી अड ની



બરાબર (૩ પ્રતિ. પ્ર.) अई કાપો. डई (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને તે ઉપર अ ની સામેની તરફ डफई સમબાજુ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો અને अ તથા फ બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. એટલે, अफ સાંધનારી લીટી કહેલા बअक ખૂણાને દુભાગેછે.

સિદ્ધતા.

फअड તથા फअई ત્રિકોણોમાં अड તથા अई બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે; अफ બાજુ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને फड તથા फई (डफई સમબાજુ ત્રિકોણોની બાજુઓ છે માટે ૨૪ વ્યા. પ્ર.) પણ બરાબર છે. માટે, फअड તથા फअई ખૂણાઓ (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી अफ સીધી લીટી કહેલા बअक ખૂણાને દુભાગે છે એ સિદ્ધ.

૧ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં એ અગત્યનું છે કે, સાંધનારી डई લીટીની જેણી તરફ કહેલો ખૂણો હોય તેની ઉલટી તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કરવો. નહિતો, સમબાજુ ત્રિકોણનું फ શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના अ શિરોબિંદુ સાથે કદાચ મળી જાયતો, अ फ સાંધનારી લીટી થશે નહિ અને તેથી સાધન પણ થશે નહિ.

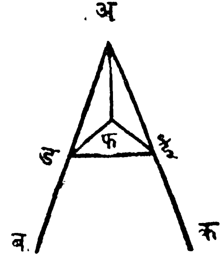
૨ તો પણ જે પ્રકારોમાં સમબાજુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખુણાના શિરોબિંદુ સાથે મળી જતું નથી, તે પ્રકારોમાં डई સાંધનારી લીટીની જે તરફ કહેલો ખૂણો છે, તેણી તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કીધાથી આ કૃત્યનું સાધન થઈ શકેછે. જે બે સ્થિતિઓમાં શિરોબિંદુ આવે, તે બે સ્થિતિઓને વાસ્તે નીચે પ્રમાણે સિદ્ધતાની જરૂર છે.

---

* આ પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બેનો ઘાત કરવાથી જે સંખ્યા આવે તે સંખ્યા જેટલા એક સીધી લીટી ખૂણાના સમાન ભાગો થઈ શકે.

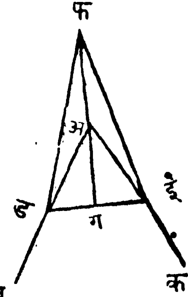
૧ લું ધારો કે, સમબાજુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુની માંહે પડેછે.

ઉપર જે સિદ્ધતા આપીછે તેમાં કાંઈપણ ફેરફાર કર્યાવિના અહીં બરાબર લાગુ થશે.



૨ જું ધારો કે, સમબાજુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુની બહાર પડેછે.

આ પ્રકારમાં फअ લીટીને વધારીશું તો તે, કહેલા ખૂણાને દુભાગશે. કેમકે, डफअ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે ईफअ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની (डफ તથા फई સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ છે માટે, ૨૪ વ્યા. પ્ર. અને अड તથા अई આકૃતિ ૨૫. પ્ર. અને फअ બંનેમાં સાધારણ છે માટે) બરાબર છે. તેથી डफअ તથા ईफअ ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે.



વળી, डफग તથા ईफग ત્રિકોણોમાં પણ डफ તથા ईफ બાજુઓ બરાબરછે, गफ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને डफग તથા ईफग ખૂણા બરાબર છે. માટે, डग તથા ईग પાયાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે.અને डगअ તથા ईगअ ખૂણાઓ પણ બરાબર છે.

હવે, डगअ તથા ईगअ ત્રિકોણોમાં डग તથા ईग બાજુઓ બરાબર છે. अग બંનેમાં સાધારણ છે. અને ग આગળના બંને તરફના ખૂણા બરાબર છે માટે डअग તથા ईअग ખૂણાઓ (૪પ્રતિ. પ્ર.) બરાબરછે. અને તેથી बअक ખૂણો अग થી દુભગાયો એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૦ મી કૃત્ય.

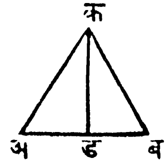
એક આપેલી (अब) અંતવાન સીધી લીટીને દુ[1]ભાગવાનું.

---

૧ અમિત કે અનંત સીધી લીટી દુભાગી શકાય નહિ કારણ કે, તેના માપની હદ નથી.

સાધન.

આપેલી अब સીધી લીટી ઉપર એક अकब સમબાજુ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને अकब ખૂણાને (૯ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. અને દુભાગનારી લીટીને કહેલી લીટીમાં (ड આગળ) મળતાં સુધી (૨સ્વી. પ્ર.) વધારો. આ (कड) લીટી કહેલી अब લીટીને ड બિંદુ આગળ દુભાગે છે.



સિદ્ધતા.

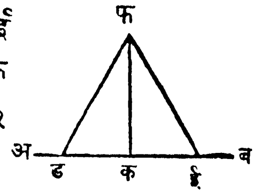
अकड તથા बकड ત્રિકોણોમાં अक તથા बक બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. અને कड બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને अकड તથા बकड ખૂણા પણ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, अड તથા बड પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર) બરાબર છે. એટલે, अब સીધી લીટી ड બિંદુ આગળ **દુભગાએલી** છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૧ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (अब) સીધી **લીટીમાં** એક આપેલા (क) બિંદુથી આપેલી **લીટી**• ઉપર **લંબ** દોરવાનું.

સાધન.

આપેલી अब લીટીમાં કોઈ પણ ड બિંદુ લો અને कड ની બરાબર कई (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો; डई ઉપર એક डफई સમબાજુ ત્રિકોણ (૧પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને फक (૧ સ્વી. પ્ર.) દોરો. એટલે, તે લીટી કહેલી લીટી ઉપર લંબ છે એવું સિદ્ધ થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, डफक તથા ईफक ત્રિકોણોમાં डफ ને ईफ બાજુઓ डफई સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ છે માટે, (૨૪ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને डक તથા ईक બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબરછે. અને फक બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. માટે, डफ તથા ईफ બરાબર બાજુઓની સામેના डकफ તથા ईकफ ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, આપેલી अब સીધી લીટી ઉપર क બિંદુ આગળ फक (૧૦વ્યા.પ્ર.) **લંબ** છે એ સિદ્ધ.

૧. આપેલી સીધી લીટીમાં અંતવાન તથા અમિત (અનંતવાન) સીધી લીટી એ બંનેનો સમાવેશ થાય છે.

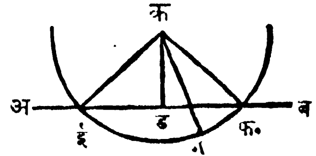
૨. આપેલી લીટી કદાપિ અંતવાન હોય અને તેની અંદરનું બિંદુ એક છેડા ઉપરજ આપ્યું હોય તો, તે છેડા તરફ તે લીટીને ૨ જા સ્વી. પ્રમાણે વધારીને આ કૃત્યનું સાધન થઈ શકે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૨ મી કૃત્ય.

કોઈ આપેલી **અનિયમિત** સીધી લીટી अब ની **બહાર** એક (क, બિંદુ આપેલું છે, ત્યાંથી આપેલી લીટી ઉપર એક **લંબ** ઊતારવાનું.

સાધન.

આપેલી લીટીની બીજી બાજુ તરફ કોઈ પણ ग બિંદુ લો અને कग (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો અને क મધ્યબિંદુ ધારીને कग ત્રિજ્યાએ આપેલી લીટીને ई તથા फ બિંદુઓમાં કાપે એવું એક ગોળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દોરો. અને कई તથા कफ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો, હવે, ગોળના પરિધથી કપાએલી ईफ લીટીને ड આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો અને કહેલા क બિંદુથી દુભાગ બિંદુ સુધી कड સીધી લીટી (૧ સ્વી. પ્ર.) દોરો. એટલે આ कड લીટી દોરવાનો **લંબ** થશે.



સિદ્ધતા.

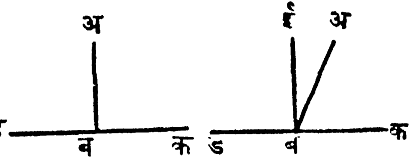
કેમકે, ईडक તથા फडक ત્રિકોણોની ईक તથા फक બાજુઓ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે માટે (૧૫ વ્યા. પ્ર) બરાબર છે. અને ईड તથા डफ બરાબર રાખેલી છે. અને कड બંનેમાં સાધારણ છે. તેથી ईडक તથા फडक ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે अब લીટી ઉપર कड (૧૦ વ્યા. પ્ર) **લંબ** છે એ સિદ્ધ.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં એ અગત્યનું છે કે, આપેલી સીધી લીટી લંબાઈમાં **અનિયમિત** જોઇએ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૩ મી પ્રમેય.

જ્યારે એક (डक) સીધી લીટી ઉપર બીજી (अब) સીધી લીટી પડીને તેની સાથે ખૂણા કરેછે, ત્યારે તેઓ બે કાટખૂણા છે. અથવા તેઓનો

સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. (પહેલી આકૃતિ) જો अव સીધી લીટી डक લીટી ઉપર લંબ હોય તો, अवक તથા अवड ખૂણા



(૧૦ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણા છેજ. પણ જો अव લંબ ન હોયતો,(બીજી આકૃતિ જાઓ) डक ઉપર व બિંદુથી (૧૧ પ્રતિ. પ્ર.) वई લંબ દોરો. અને તેથી डवई તથા कवई ખૂણા (૧૦ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણા થયા. પણ कवई ખૂણો कवअ તથા अवई ખૂણા મળીને થયેલો છે. હવે, આખા कवई ખૂણામાં ईवड ખૂણો મેળવો. તેમ कवई ખૂણાના ભાગ कवअ તથા अवई ખૂણાઓમાં પણ ईवड ખૂણો મેળવો એટલે, कवई તથા ईवड નો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) कवअ તથા अवई તથા ईवड એ ત્રણ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થશે.

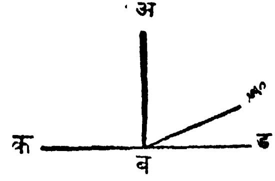
વળી, डवअ ખૂણો डवई તથા ईवअ ખૂણા મળીને થયેલો છે. એઓમાં अवक ખૂણો મેળવો એટલે, डवअ તથા अवक ખૂણાઓનો સર્વાળો डवई તથા ईवअ અને अवक એ ત્રણ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થયો; પણ कवई તથા ईवड ખૂણાઓનો સર્વાળો આજ ત્રણ ખૂણાના સર્વાળાની બરાબર આપણે ઉપર કરી ગયા છીએ, તેથી, डवअ તથા अवक ખૂણાઓનો સર્વાળો कवई તથા ईवड ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. અને कवई તથા ईवड ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, डवअ તથા अवक ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે એ સિદ્ધ.

(બીજી રીતે) અથવા આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં આઠમા પ્રત્યક્ષપ્રમાણનો ઉપયોગ કરવાથી સ્પષ્ટ જણાશે કે, कवअ તથા अवड ખૂણાઓનો સર્વાળો कवई તથા ईवड ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. અને कवई તથા ईवड ખૂણાનો સર્વાળો (૧૦ વ્યા. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે માટે कवअ તથા अवड ખૂણાનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૪ મી પ્રમેય.

જો, (वक તથા वड) બે સીધી લીટીઓ એક બીજી (अव) સીધી લીટીને એકજ (व) બિંદુ આગળ અને વિરૂદ્ધ બાજુઓ તરફ મળીને જે ખૂણાઓ કરે, તેઓનો સર્વાળો જો બે કાટખૂણા બરાબર હોય તો, તે वक તથા वड સીધી લીટીઓથી એક(कड) **અખંડ સીધી લીટી થશે.**

કેમકે, એમ ધારો કે, बक સીધી લીટીનો बड વધારો નથી. પણ बई છે. ત્યારે, कबअ તથા अबई ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે; પણ ઉપન્યાસ પ્ર. कबअ તથા अबड ખૂણાનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે: માટે, कबअ તથા अबड ખૂણાઓનો સર્વાળો



(૧ પ્રત્ય. પ્ર.) कबअ તથા अबई ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થયો: આ બરાબર પરિમિતોમાંથી कबअ ખૂણો જે બંનેમાં સામાન્ય છે તે બાદ કરો એટલે, अबई તથા अबड ખૂણા બાકી રહેશે તે (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. પરંતુ, अबई ખૂણો अबड ખૂણાનો ભાગ છે તેથી, ભાગ આખાની બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે; માટે, बई એ बक નો વધારો નથી. અને તેજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, बड વિના બીજી કોઈપણ લીટી તેનો વધારો નથી. માટે बक ની સાથે बड મળ્યાથી એક અખંડ સીધી લીટી થાયછે એ સિદ્ધ.*

પ્રતિજ્ઞા ૧૫ મી પ્રમેય.

જો (अब તથા कड) બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદે તો, સામસામેના (अईक તથા बईड અને कईब તથા अईड) ખૂણાઓ બરાબર થશે.

कई સીધી લીટી अब સીધી લીટી ઉપર પડેછે તેથી, अईक તથા कईब ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે; અને बई સીધી લીટી कड સીધી લીટી ઉપર પડેછે, તેથી कईब તથા बईड ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે; તેથી अईक તથા कईब ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) कईब તથા बईड ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. આ બંને બરાબર સર્વાળામાંથી कईब જે બંનેમાં સામાન્ય ખૂણો છે તે બાદ કરો એટલે, બાકી अईक તથા बईड

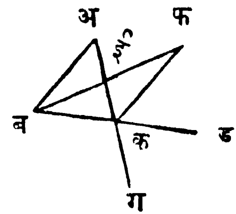
* ઉલટી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરેલ છે.

ખૂણા જેઓ સામસામે છે તે (૩ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર રહેશે. અને એજ પ્રમાણે कईव ખૂણો अईड ખૂણાની બરાબર છે એવું સિદ્ધ થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૬ મી પ્રમેય.

જો કોઈ (वअक) ત્રિકોણની એક (वक) બાજુને વધારી તો, બહારનો (अकड) ખૂણો, માંહેના (अकव) ખૂણાની સામેના (वअक અથવા अवक) ખૂણા માંહેલા કોઇપણ એક ખૂણા કરતાં **મોટો** છે. (પ્રથમ वअक ખૂણા કરતાં अकड ખૂણો મોટોછે એવું સિદ્ધ કરીએ.)

કેમકે, अक બાજુને ई આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. અને वई (૧ સ્વી. પ્ર.) દોરો. વળી, वई ને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો અને તેમાંથી वई ના જેવડી ईफ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને फक (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



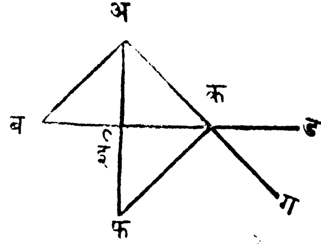
कईफ તથા अईव ત્રિકોણોમાં कई તથા ईफ બાજુઓ અનુક્રમે (આકૃ. ૨ચ. પ્ર.) अई તથા ईव બાજુઓની બરાબર છે. અને कईफ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) अईव ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ईकफ તથા वअक ખૂણા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. ईकफ ખૂણા કરતાં अकड ખૂણો (૯ પ્રસ. પ્ર.) મોટોછે માટે, ईकफ ખૂણાની બરાબરના वअक ખૂણા કરતાં પણ अकड ખૂણો **મોટો** છેજ.

૧ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં ત્રિકોણની માંહેના જે ખૂણા કરતાં બહારનો ખૂણો મોટો કરવો હોય, તે બંને ખૂણાની સાથે તે ત્રિકોણની જે બાજુ જોડાએલી હોય, તે બાજુને દુભાગવી જોઇએ.

☞ આ આકૃતિમાં अक બાજુને વધાર્યાથી થયેલો બહારનો वकग ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) अकड ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, वकग ખૂણો પણ માંહેના वअक ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

અથવા.

આપેલા (बअक) ત્રિકોણનો બહારનો (अकड) ખૂણો માંહેના (अबक) ખૂણા કરતાં મોટો છે (એ બા. સિદ્ધ કરીએ).



ઉપર કહેલા નિયમ પ્રમાણે તે બંને ખૂણા સાથે જોડાએલી बक લીટીને ई આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) **દુભાગો** અને अई (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વળી अई ને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને તેમાંથી अई જેવડી ईफ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને फक (૧ ... પ્ર.) સાંધો. અને अक (૨ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

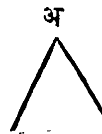
કેમકે, कईफ તથા अईब ત્રિકોણોમાં कई તથા ईफ બાજુઓ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) અનુક્રમે बई તથા ईअ બાજુઓની બરાબર છે અને कईफ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) अईब ખૂણાની બરાબર છે; માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) ईकफ તથા अबई ખૂણા બરાબર છે; પણ, ईकफ ખૂણા કરતાં ईकग ખૂણો (૯ પ્ર-સ. પ્ર.) મોટો છે; માટે, अबई ખૂણા કરતાં ईकग ખૂણો પણ **મોટો** છેજ. અને ईकग તથા अकड ખૂણા (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે, માટે, अबई ખૂણા કરતાં अकड ખૂણો **મોટો** છે અને अबई ખૂણો તેજ अबक ખૂણો છે માટે, अबक ખૂણા કરતાં अकड ખૂણો **મોટો** છે એ સિદ્ધ.

☞ આ સિદ્ધતા ઉપરથી વિદ્યાર્થિઓ જોશે કે, જો ઉપન્યાસમાં बक ને બદલે अक લીટી વધારવાની કહી હોતતો, તેથી થએલો બહારનો बकग ખૂણો માંહેના अबक ખૂણા કરતાં મોટો છે એમ પણ સિદ્ધ થયું.

પ્રતિજ્ઞા ૧૭ મી પ્રમેય.

એક (बअक) ત્રિકોણના કોઈ પણ બે (अ તથા क અથવા ब તથા क અથવા अ તથા ब) ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં **ઓછોછે.**

કહેલા ખૂણાઓ પૈકી કોઇ (क) ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કોઈ (बक) બાજુને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો તો, अकड બહારનો ખૂણો માંહેના अ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. તે બંનેમાં अकब ખૂણો મેળવીએ તો, अकड તથા अकब ... ખૂણાઓનો ...



સર્વાળા કરતાં (૪ પ્રસ. પ્ર.) મોટો થશે. અને **अकड** તથા **अकब** ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, **अ** તથા **अकब** ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં **ઓછો છે.**

તેજ પ્રમાણે **ब** તથા **बकअ** ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં **ઓછો** થશે.

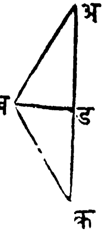
વળી, જો **ब** બિંદુના પાર **बक** ને વધારો તો, એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, **ब** તથા **अ** ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થશે.

૧. એ અગત્યનું છે કે, ત્રિકોણની માંહેના જે બે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછોછે એમ બતાવવું હોય, તે ખૂણાના હરકોઈ શિરોબિંદુમાંથી ... ખૂણો કરનારી ગમે તે બાજુને વધારવી જોઈએ. બાકીના ત્રીજા ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કોઈ બાજુને વધારવી નહિ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૮ મી પ્રમેય.

કોઈ પણ (**बअक**) ત્રિકોણમાં જો એક (**अक**) બાજુ બીજી (**अब**) કરતાં મોટી હોયતો; મોટી બાજુની સામેનો (**अबक**) ખૂણો નાની બાજુની સામેના (**बकअ**) ખૂણા કરતાં **મોટો** થશે.

મોટી **अक** બાજુમાંથી નાની **अब** બાજુની બરાબર **अड** (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને **बड** (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. **बअड** ત્રિકોણની **अब** તથા **अड** બાજુઓ બરાબર છે તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના **अबड** તથા **अडब** ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ, **अडब** ખૂણો માંહેના **अकब** ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટોછે. માટે, **अडब** ખૂણાની બરાબરનો **अबड** ખૂણો પણ **अकब** ખૂણા કરતાં મોટો છે; અને **अबड** ખૂણા કરતાં **अबक** ખૂણો (૯ પ્રસ. પ્ર.) મોટો છે. માટે **अकब** ખૂણા કરતાં તો **अबक** ખૂણો **ઘણોજ મોટો** છે એ સિદ્ધ.



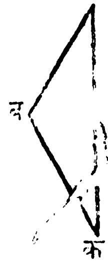
૧. મોટી બાજુમાંથી નાની બાજુ જેવડી કાપીને ઉપર પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી છે. તેમ નાની બાજુને મોટી જેવડી **વધારીને** પણ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકે.

૨. બાજુ કાપવામાં કે **વધારવામાં** યાદ રાખવું કે, બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય તોજ સિદ્ધતા થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૧૯ મી પ્રમેય.

... બીજા (**क**) ખૂણા

કરતાં મોટો હોય તો, મોટા ખૂણાની સામેની (अक) બાજુ તે, નાના ખૂણાની સામેની (अव) બાજુ કરતાં **મોટી** થશે. *



કેમકે, अक બાજુ अव થી મોટી ન હોય તો, તેની બરાબર અથવા તેનાથી નાની હોય.

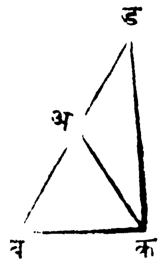
अक તથા अव બાજુઓ બરાબર નથી. કેમકે, ત્યારે તો, व તથા क ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર થાય. પણ એ, ઉપન્યાસથી ઉલટું છે. વળી, अक બાજુ अव બાજુ કરતાં નાની નથી. કેમકે, ત્યારે તો, व ખૂણો क ખૂણા કરતાં (૧૮ પ્રતિ. પ્ર.) નાનો થાય. એ પણ ઉપન્યાસથી ઊલટું છે.

જ્યારે अक બાજુ अव ની બરાબર અથવા તેનાથી નાની નથી. ત્યારે તો **મોટી** છેજ એ સિદ્ધ.*

પ્રતિજ્ઞા ૨૦ મી પ્રમેય.

એક (वअक) ત્રિકોણની કોઇપણ (अव તથા अक) બે બાજુઓનો સર્વાળો ત્રીજી (वक) બાજુ કરતાં **મોટો** છે.

वअ બાજુને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને अक ની બરાબર अड (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને डक (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



कअड ત્રિકોણની अड તથા अक બાજુઓ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) कअड સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના अडक તથા अकड ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, अकड ખૂણા કરતાં वकड ખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. માટે, તે, अकड ખૂણાની બરાબરના अडक ખૂણા કરતાંપણ મોટો છે તેથી, वडक ત્રિકોણમાં वड બાજુ वक બાજુ કરતાં (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટીછે. પણ वड એ अव તથા अड ના સર્વાળા બરાબરછે. અને अड ને अक ની બરાબર રાખેલી છે. તેથી, अव તથા अक ના સર્વાળા બરાબર वड છે; માટે, अव તથા अक નો સર્વાળો वक કરતાં મોટો છે.

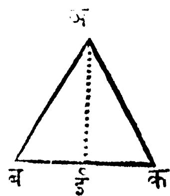
૧. ઉપર પ્રમાણે એક ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓનો સર્વાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં **મોટો** થશે.

---

* ....

૨. પણ, જે બે બાજુઓનો સર્વાળો મોટો કરવો હોય, તો બે બાજુઓ જે બિંદુમાં એકઠી મળે તે બિંદુથી બેમાંથી એકને બીજીના જેટલીજ વધારવી જોઇએ.

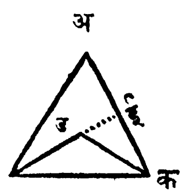
(બીજી રીતે) बअक ખૂણાને (૯ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. પછી अ તથા ई બિંદુઓ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. बईअ ખૂણો ईअक ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે; અને अ ખૂણાના ईअक તથા ईअब ભાગો (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) બરાબર છે, તેથી એવું નીકળેછે કે, ई આગળનો પ્રત્યેક ખૂણો अ ખૂણાના ભાગો માંહેલા પ્રત્યેક ખૂણા કરતાં મોટો છે. અને તેથી (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) એવું નીકળે છે કે, बअ બાજુ बई કરતાં અને अक બાજુ कई કરતાં મોટી છે. એમાટે, अब તથા अक બાજુઓનો સર્વાળો बई તથા कई ના સર્વાળા કરતાં મોટો છે. અને बई તથા कई ના સર્વાળા બરાબર बक છે. માટે, अब તથા अक બાજુઓનો સર્વાળો बक બાજુ કરતાં મોટો છે એ સિદ્ધ.



પ્રતિજ્ઞા ૨૧ મી પ્રમેય.

'કોઈ (बअक) ત્રિકોણની **માંહે** એક (ड) બિંદુ સુધી કોઈ પણ (बक) બાજુના છેડાઓથી દોરેલી (बड તથા कड) સીધી લીટીઓનો સર્વાળો ત્રિકોણની બાકીની (अब તથા अक) બે બાજુઓના સર્વાળા કરતાં **ઓછોછે** (૧ બા.); પણ તે લીટીઓની વચ્ચેનો (ड) ખૂણો બાજુઓની વચ્ચેના (अ) ખૂણા કરતાં **મોટો** છે (૨ બા.).

बड ને ई સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને बअई ત્રિકોણ લો તો, अब તથા अई બાજુઓનો સર્વાળો (૨૦ પ્રતિ. પ્ર.) ત્રીજી बई બાજુ કરતાં મોટો છે. એ પ્રત્યેકમાં ईक મેળવો એટલે, अब અને अक (अई+ईक) બાજુઓનો સર્વાળો बई તથા ईक બાજુઓના સર્વાળા કરતાં (૪ પ્રસ. પ્ર.) મોટો થશે.



... डईक ત્રિકોણ લો તો, डई તથા ईक બાજુઓનો સર્વાળો ત્રીજી ... बड મેળવો. એટલે,

बई (बड+डई) તથા ईक નો સર્વાળો बड તથા डक ના સર્વાળા કરતાં (૪ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો થશે.

अब તથા अक નો સર્વાળો बई તથા ईक ના સર્વાળા કરતાં મોટો છે; અને बई તથા ईक નો સર્વાળો बड તથા डक ના સર્વાળા કરતાં મોટોછે, એમ સિદ્ધ કર્યું છે. ત્યારે, अब તથા अक નો સર્વાળો बड તથા डक ના સર્વાળા કરતાં તો ઘણોજ મોટો થશે. એટલે, अब તથા अक ના સર્વાળા કરતાં बड તથા कड નો સર્વાળો ઓછોછેજ. (૧ બા. સિદ્ધ થયું.)

डईक ત્રિકોણની બહારનો बडक ખૂણો માંહેના डईक ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર) મોટો છે; અને बअई ત્રિકોણની બહારનો डईक ખૂણો માંહેના अ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, अ ખૂણા કરતાં તો ड ખૂણો ઘણોજ મોટો છે. એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૨૨ મી કૃત્ય.

કોઈ (अ, ब, क) ત્રણ સીધી લીટીઓ આપેલી છે, એવી કે, તેઓ માંહેલી કોઇપણ બેનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં મોટો છે તો, જેની બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી લીટીઓની બરાબર થાય, એવો એક ત્રિકોણ કરવાનું.

સાધન.

કોઇપણ ड બિંદુથી આપેલી લીટીઓમાંની अ ની બરાબર डई લીટી (૨ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને તેજ બિંદુથી આપેલી લીટીઓમાંથી બીજી ब ની બરાબર डग (૨ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને ई બિંદુથી क ની બરાબર (૨ પ્રતિ. પ્ર.) ईफ દોરો. વળી, ड મધ્ય બિંદુથી डग ત્રિજ્યાએ (૩ સ્વી. પ્ર.) એકગોળ કરો. અને ई મધ્ય બિંદુથી ईफ ત્રિજ્યાએ બીજો ગોળ પણ (૩ સ્વી. પ્ર.) કરો. અને આ ગોળોના क्रे છેદન બિંદુથી क्रेड તથા क्रेई (૧ સ્વી. પ્ર.) ... डक्रेई થશે

સિદ્ધતા.

डकेई ત્રિકોણની डई બાજુ (આકૃ. ર૪. પ્ર.) अ ની બરાબર રાખેલી છે. डके અને डग એકજ મોટા ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી, (૧૫ વ્યા. પ્ર.) તેઓ બરાબર છે. डग, ब ની બરાબર રાખેલી છે એટલે, डके (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) ब ની બરાબર છે. તેજ પ્રમાણે केई તથા फई નાના ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે; તેથી, તે બંને (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને फई, क ની બરાબર રાખેલી છે. એટલે, क લીટી (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) केई ની બરાબર છે. તેથી, डकेई ત્રિકોણની डई, डके તથા केई બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી अ, ब તથા क સીધીલીટીઓની બરાબરછે. એટલે કરવાનો ત્રિકોણ डकेई થયો એ સિદ્ધ.

૧. ત્રણ લીટીઓમાંથી કોઈ એક લીટીના દરેક છેડા બિંદુથી બાકીની બે લીટીઓ બરાબર લીટીઓ દોરવી. અને પછી સંધાએલા છેડાઓને મધ્યબિંદુ ધારી બાકીની લીટીઓ જેટલી ત્રિજ્યાએ ગોળો દોરવા, એ અવશ્યનું છે.

૨. બે લીટીઓનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં મોટો હોય તોજ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકે. (૨૦ મી પ્રતિજ્ઞા જુઓ.) અને એમ હોય તોજ બે ગોળો એક બીજાને છેદે. બે ગોળો છેદાવાજ જોઇએ, એ, આ પ્રતિજ્ઞામાં અવશ્યનું છે.

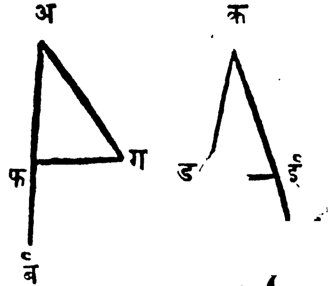
૩. બે લીટીઓનો સર્વાળો ત્રીજીની બરાબર હોય તો, બંને ગોળનો પરિધ એક બીજાને સ્પર્શ કરશે; પણ, છેદાશે નહિ; તેમ બે બાજુનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં નાનો હોય તો ગોળનો પરિધ ન છેદાતાં જૂદા જૂદા ગોળ થાય; અને તેથી આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકશે નહિ.

૪. ત્રણે લીટીઓ બરાબર હોય તો, આ પ્રતિજ્ઞા પહેલી પ્રતિજ્ઞા જેવીજ થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨૩ મી કૃત્ય.

— ...ાપેલી લીટીમાં આપેલા (अ) બિંદુથી એક

આપેલા ખૂણાની બાજુઓમાં કોઇપણ ड તથા ई બિંદુઓ લો. અને डई (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને डकई ત્રિકોણની સાથે સમબાજુ (कड, अफ ની कई, अग ની" અને डई, फग ની બરાબર) થાય એવો એક फअग ત્રિકોણ (૨૨ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. એટલે फअग ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ



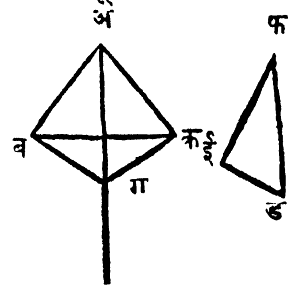
અનુક્રમે डकई ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની બરાબર છે. તેથી डई તથા फग બરાબર બાજુની સામેના डकई તથા फअग ખૂણા (૮ પ્રતિ પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧. બાવીશમી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે ત્રિકોણ કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવું કે, જે બિંદુથી ખૂણો કરવો હોય, તે બિંદુ ઉપર આપેલા ખૂણાનું શિરોબિંદુ આવે એવી રીતે ત્રિકોણ કરવો જોઇએ.

પ્રતિજ્ઞા ૨૪ મી પ્રમેય.

જો, (बअक તથા ईफड) બે ત્રિકોણોમાં એકની (अब તથા अक) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (फई તથા फड) બે બાજુઓની બરાબર હોય (એટલે, अब, फई ની તથા अक, फड ની) અને બરાબર બાજુઓથી થયેલા ખૂણાઓમાંથી એક (बअक) ખૂણો બીજા (ईफड) ખૂણા કરતાં મોટો હોય તો, મોટા ખૂણા સામેની (बक) બાજુ નાના ખૂણા સામેની (ईड) બાજુ કરતાં **મોટી** થશે.

अब બાજુના अ બિંદુથી તે બાજુ સાથે ईफड ખૂણાની બરાબર (૨૩ પ્રતિ. પ્ર.) बअह ખૂણો કરો. અને फड ની બરાબર (૩ પ્રતિ. પ્ર.) अग કાપો. અને बग તથા कग (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



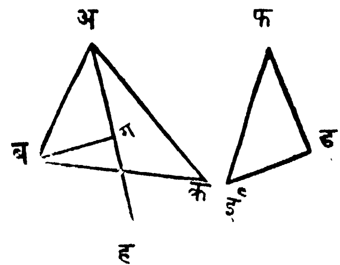
बअग તથા ईफड ત્રિકોણોમાં अब તથા अग બાજુઓ અનુક્રમે फई તથા फड બાજુઓની બરાબર છે. અને અંતર ......

૨૫. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, बग તથા ईड પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે.

अग (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) फड ની બરાબર છે. અને अक તથા फड (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. તેથી अग તથા अक બાજુઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર. માટે, गअक ત્રિકોણ (૨૫ વ્યા. પ્ર.) સમદ્વી બાજુ ત્રિકોણ છે તેથી તેના अकग તથા अगक ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ.) બરાબર છે; પણ बकग ખૂણા કરતાં अकग ખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. અને अकग તથા अगक ખૂણા બરાબર છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું. માટે, बकग ખૂણા કરતાં अगक ખૂણો પણ મોટોછે. અને अगक ખૂણા કરતાં बगक ખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે; માટે बकग ખૂણા કરતાં बगक ખૂણો તો ઘણોજ મોટો છે.

હવે, बगक ત્રિકોણ લેઇએ તો, તેનો बगक ખૂણો बकग ખૂણા કરતાં મોટો છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે તેથી તેની સામેની बक બાજુ बग બાજુ કરતાં (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટી છે. અને बग, ईड ની બરાબર છે. તેથી ईड કરતાં बक બાજુ મોટી થઈ એ સિદ્ધ.

(બીજી રીતે) કદાચ જો ग બિંદુ बक પાયાથી ઉંચે પડે તો ધારોકે, તે ग આગળ પડેછે. बग (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. હવે बअग તથા ईफड ત્રિકોણોના बग તથા ईड પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને अग તથા बग લીટીઓનો સર્વાળો अक તથા बक ના સર્વાળા કરતાં (૨૧ પ્રતિ. પ્ર.) ઓછોછે. એ બંને વિષમ સર્વાળામાંથી अग તથા अक બરાબર લીટીઓ બાદ કરો તો बग, बक કરતાં (૫ પ્રત્ય. પ્ર.) નાની રહેશે. એટલે, बग કરતાં बक મોટી છે. અને बग તથા ईड બરાબર છે તેથી ईड કરતાં પણ बक મોટી છે એ સિદ્ધ.



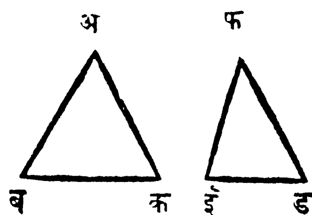
(ત્રીજી રીતે) જો, ग બિંદુ बक પાયામાં પડેતો, बक બાજુ बग કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટી છેજ.

...ના ૨૫ મી પ્રમેય.

...ઓ અ-

નુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય (**बअ**, **ईफ**ની તથા **अक**, **फड** ની) અને ત્રીજી બાજુ (**बक**) બીજાની ત્રીજી બાજુ (**ईड**) કરતાં મોટી હોયતો; મોટી બાજુની સામે નો **बअक** ખૂણો નાની બાજુની સામેના (**ईफड**) ખૂણા કરતાં **મોટો** થશે.*

જો, अ ખૂણો फ ખૂણા કરતાં મોટો ન હોય તો, તેની **બરાબર** હોય અથવા **નાનો** હોય.



બંને ખૂણા બરાબર નથી. કેમકે, જો એમ હોય તો, **बक** બાજુ (૪ પ્ર-તિ. પ્ર.) **ईड** બાજુની બરાબર થાય. પણ એ ઉપન્યાસથી ઊલટું છે.

તેમ, **बअक** ખૂણો **ईफड** ખૂણા કરતાં નાનો નથી; કેમકે, એમ હોય તો, **बक** બાજુ (૨૪ પ્રતિ. પ્ર.) **ईड** બાજુથી નાની થાય. **એ પણ** ઉપન્યાસથી ઊલટું છે.

જ્યારે, अ ખૂણો क ખૂણાની **બરાબર** અથવા તેનાથી **નાનો નથી;** ત્યારેતો, **મોટો થવોજ જોઈએ** એ સિદ્ધ.+

પ્રતિજ્ઞા ૨૬ મી પ્રમેય.

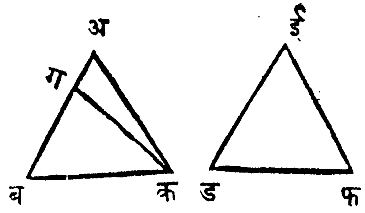
જો, (**बअक** તથા **डईफ**) બે ત્રિકોણોમાં એકના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજાના બે ખૂણાઓ (**ब**,**ड** ની क, फ) ની બરાબર હોય; અને એક ત્રિકોણની ત્રણમાંની ગમે તે એક બાજુ તેની સરૂપ* સ્થિતિમાં રહેલી બીજા ત્રિકોણની એક બાજુની બરાબર હોય તો; બાકીની **બાજુઓ** તથા **ખૂણાઓ** અનુક્રમે એક બીજાની **બરાબર** થશે.

(પહેલી રીતે) ધારો કે, બરાબર ખૂણાઓની વચ્ચે રહેલી बक તથા **डफ** બાજુઓ બરાબર છે; ત્યારે, बअ બાજુ પણ **डई** બાજુની બરાબર

---

* ચોવીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે. + ઊલટી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરીછે.

* એક જેવી સ્થિતિમાં અથવા એક જેવી [illegible] સ્થિતિ કે દિશા [illegible]



છે. કેમકે, જો તે બંને બરાબર ન હોય તો, તેમાંની એક મોટી હોય.

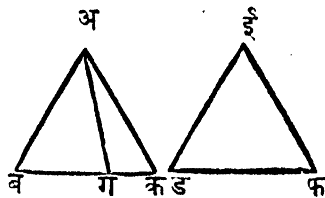
બની શકે તો ધારો કે, बअ બાજુ डई કરતાં મોટી છે. ત્યારે, डईની બરાબરबग (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો.અને गक (૧ સ્વી પ્ર.)સાંધો.

गबक તથા ईडफ ત્રિકોણોમાં बग તથા डई બાજુઓ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) બરાબર છે. અને बक તથા डफ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ ब ખૂણો પણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) ड ખૂણાની બરાબર છે. માટે, बकग તથા डफई ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ बकअ ખૂણો (ઉપન્યાસ પ્ર.) डफई ખૂણાની બરાબર છે. એટલે, बकग તથા बकअ ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા; એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, बअ બાજુ डई બાજુ કરતાં મોટી નથી; તેમ નાની પણ નહિ થાય તેથી તે બંને **બરાબર** છે. અને बक તથા डफ બાજુઓ અને ब તથા ड ખૂણાઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) अक બાજુ ईफની અને अ ખૂણો ई ખૂણાની **બરાબર** છે.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં બાકીની બાજુઓ તથા ખૂણા બરાબર કરીને રહેવા દીધુંછે પણ પછી ચોથી પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બંને ત્રિકોણો એક રૂપ થાય.

(બીજી રીતે) ધારો કે, क તથા फ બરાબર ખૂણાઓની સામેની अब તથા ईड બાજુઓ બરાબર છે; ત્યારે, बक તથા डफ બાજુઓ પણ બરાબર થશે.

કેમકે, જો બની શકે તો ધારો કે, તેઓ માંહેલી એક बक બાજુ બીજી डफ કરતાં મોટી છે. એટલે, डफ ની બરાબર बग (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને अग (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



अबग તથા ईडफ ત્રિકોણોમાં अब

...ના ત્રિકોણો એકરૂપ કરવાને વાસ્તે છે. આગળ ચોથી

તથા बग બાજુઓ (આકૃ. ૨૪. પ્ર.) અનુક્રમે ईड તથા डफ બાજુઓની બરાબર છે. અને ब ખૂણો (ઉપન્યાસ પ્ર.) ड ખૂણાની બરાબર છે. માટે अगब તથા ईफड ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર) બરાબર છે; અને क ખૂણો પણ (ઉપન્યાસ.પ્ર.) ईफड ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, अगब તથા क ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા, પણ (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) એ, અસંભવિત છે. માટે, बक તથા डफ બાજુઓ માંહેલી કોઇપણ એક, બીજી કરતાં મોટી નથી. અને તેથી તેઓ **બરાબર** છે.

बक તથા डफ બાજુઓ બરાબર છે, અને अब બાજુ (ઉપન્યાસ પ્ર.) डई બાજુની બરાબર છે, તેમજ ब ખૂણો પણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) ड ખૂણાની બરાબર છે. માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) अक બાજુ ईफ બાજુની અને अ ખૂણો ई ખૂણાની **બરાબર** છે.

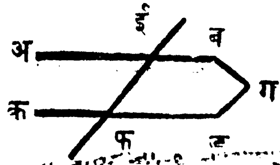
૧. ગમે તે બે ખૂણા અને તેના સંબંધની ગમે તે એક બાજુ લેઈ આ પ્રતિજ્ઞા ઘણી રીતે સિદ્ધ કરી શકાય.

૨. ઉપર બંને રીતોમાં મોટી બાજુમાંથી નાની બાજુના જેવડી કાપીને પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી છે. પણ નાની બાજુને મોટીના જેવડી (૩ જી પ્રતિજ્ઞા નીચેની બીજી કલમ મુજબ) વધારીને પણ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી શકાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨૭ મી પ્રમેય.

જો, (ईफ) એક સીધી લીટી, (अब તથા कड) બે સીધી લીટીઓને છેદે; અને તેથી (अईफ તથા ईफड) વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ એક એકની બરાબર થાય તો; આ બંને સીધી લીટીઓ **સમાંતર** થશે.

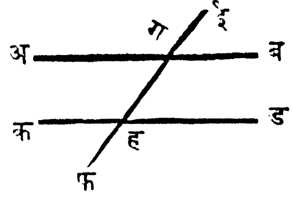
કેમકે, જો બની શકે તો, ધારો કે, તે લીટીઓ સમાંતર નથી. ત્યારે, તેમના ब તથા ड છેડાની પાર વધારતાં તેઓ ग આગળ મળેછે. તેથી, ईगफ ત્રિકોણનો अईफ બહારનો ખૂણો માંહેના ईफग ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. પણ ઉપન્યાસ પ્ર. તે બંને બરાબર છે. એ, અસંભવિત છે. એ માટે, अब તથા कड ને તેના ब [illegible]



એવું પણ સિદ્ધ થઈ શકશે કે, તેઓને अक છેડાની પાર વધારતાં પણ મળતી નથી. માટે, જ્યારે એ સીધી લીટીઓ કોઇપણ એક તરફ વધારતાં મળતી નથી ત્યારે, (૩૫ વ્યા. પ્ર.) તેઓ **સમાંતર** છે.

પ્રતિજ્ઞા ૨૮ મી પ્રમેય.

જો, (ईफ) એક સીધી લીટી, (अब તથા कड) બે સીધી લીટીઓને છેદે; અને તેથી બહારનો (ईगअ) ખૂણો, લીટીની એકજ તરફના માંહેના અને સામેના (गहक) ખૂણાની બરાબર હોય (૧ બા.); અથવા એકજ તરફના માંહેના (अगह તથા कहग) ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થાય (૨ બા.); તો એ બે સીધી લીટીઓ અરસપરસ **સમાંતર** થશે.



ધારો કે, ईगअ તથા गहक ખૂણાઓ બરાબર છે. અને ईगअ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) बगह ખૂણાની બરાબર છે. માટે, गहक તથા बगह ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. પણ તેઓ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ છે માટે, अब તથા कड સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર) **સમાંતર** છે. (જો, ईगब તથા गहड ખૂણાઓ બરાબર કહેલા હોત, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકત.)

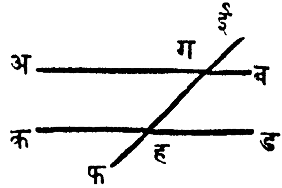
(બીજી બાબત.) ધારો કે, अगह તથા कहग ખૂણાઓનો સર્વાળો (ઉપન્યાસ પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને गहड તથા गहक ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણાની બરાબર છે. માટે, अगह તથા कहग ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) गहड તથા कहग ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર છે. એમાંથી कहग ખૂણો જે એ બંનેમાં સામાન્ય (સાધારણ) રહેલો છે તે બાદ કરો. એટલે, બાકીનો अगह ખૂણો (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) गहड ખૂણાની બરાબર રહેશે. પણ તેઓ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ છે માટે, अब તથા कड સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) **સમાંતર** છે. (જો बगह તથા डहग ખૂણાઓ બરાબર કહેલા હોત, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકત.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૯ મી પ્રમેય.

[illegible] લીટી (अब તથા कड) બે **સમાંતર** સીધી [illegible] ખૂણાઓ

બરાબર થાયછે. (પહેલી બા.); અને **બહારનો** (ईगअ) ખૂણો **એકજ** તરફના **માંહેના અને સામેના** (गहक) ખૂણાની બરાબર થાયછે. (૨ બા.); અને એકજ તરફના **માંહેના** (अगह તથા कहग) બે ખૂણાઓનો **સર્વાળો બે કાટખૂણા** બરાબર થાયછે (ત્રીજી બા.)*

જો, अगह તથા गहड બંને વ્યુત્ક્રમ ખૂણા બરાબર ન હોય તો ધારો કે, તેઓ માંહેનો એક अगह બીજા गहड ખૂણા કરતાં મોટો છે. એ બંને વિષમ પરિમિતોની સાથે बगह ખૂણો મેળવ્યો તો, अगह તથા बगह ખૂણાઓનો સર્વાળો, बगह તથા गहड ખૂણાના સર્વાળા કરતાં (૪ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો થશે.



પણ अगह તથા बगह ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, बगह તથા गहड ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે. અને તેથી अब તથા कड લીટીઓ વધારીશું તો, તેઓ (૧૨ પ્રત્ય પ્ર.) बड તરફ મળશે. પણ, (ઉપન્યાસ પ્ર.) તેઓ સમાંતર છે. તેથી, મળી શકતી નથી. એ, અસંભવિત છે. માટે अगह તથા गहड ખૂણાઓ માંહેલો કોઇપણ એક બીજા કરતાં મોટો નથી. ત્યારે, તેઓ **બરાબર** છેજ. (એજ પ્રમાણે बगह તથા गहक ખૂણાઓ બરાબર છે એમ સિદ્ધ થઈ શકે.)

(બીજી બા.) બહારનો ईगअ ખૂણો માંહેના गहक ખૂણાની બરાબર છે. કેમકે, ईगअ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) बगह ખૂણાની બરાબર છે. અને बगह ખૂણો (આ પ્રતિજ્ઞાની પહેલી બા. પ્ર.) गहक વ્યુત્ક્રમ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ईगअ તથા गहक ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) **બરાબર** છે. (એજ પ્રમાણે ईगब તથા गहड ખૂણાઓ બરાબર છે એવું સિદ્ધ થઈ શકે.)

(ત્રીજી બા.) એકજ તરફના अगह તથા कहग માંહેના ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. કેમકે, ईगअ* તથા गहक ખૂણાઓ

---

* ૨૭ તથા ૨૮ મી પ્રતિજ્ઞાનો ઉલટ પક્ષ છે.

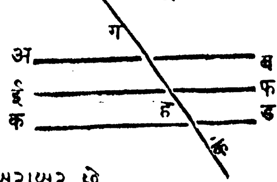
* આ ખૂણાને બદલે बगह લેઇએ તો (આ પ્રતિ[illegible]
તેની બરાબરનો (गहक [illegible]

(આ પ્રતિજ્ઞાની બીજી બા. પ્ર.) બરાબર છે. અને તે બંનેની સાથે જો अगह ખૂણો મેળવ્યો તો, ईगअ તથા अगह ખૂણાનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) अगह તથા गहक ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થશે. અને ईगअ તથા अगह ખૂણાનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, अगह તથા गहक ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. (એજ પ્રમાણે बगह તથા गहड ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે એમ સિદ્ધ થઈ શકે.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૦ મી પ્રમેય.

જો, (अब તથા कड) બે સીધી લીટીઓ (ईफ) એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાંતર હોય તો; તેઓ **અરસ્પરસ સમાંતર** થશે.

ધારો કે, गक्रे સીધી લીટી તેઓને છેદેછે. તેથી अगह ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. ૧ બા. પ્ર.) गहफ ખૂણાની બરાબરછે.



તેમજ हक्रेड ખૂણો પણ (૨૯ પ્રતિની ૨ બા. પ્ર.) गहफ ખૂણાની બરાબરછે. માટે, अगह ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) हक्रेड (गक्रेड) ખૂણાની બરાબર છે.

હવે, अब તથા कड સીધી લીટીઓને गक्रे સીધી લીટી છેદેછે; અને તેથી થયેલા अगह તથા गक्रेड વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરાબરછે તેથી अब તથા कड સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ, પ્ર.) **સમાંતર** છેજ.

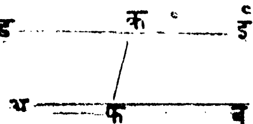
૧. જો ईफ લીટીની સાથે બે લીટીઓ સમાંતર છે તે ईफ લીટી વચ્ચે ન આપતાં ગમે તે એક તરફ આપી હોય, તોપણ સિદ્ધતા થઈ શકે.

પ્રતિજ્ઞા ૩૧ મી કૃત્ય.

એક આપેલા (क) બિંદુનીપાર એક આપેલી (अब) સીધી લીટીને **સમાંતર એક સીધી લીટી દોરવાનું.**

સાધન.

अब સીધી લીટીમાં કોઇપણ फ બિંદુ લો. અને फक (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને क બિંદુ આગળ અને कफ સીધી ... સાથે अफक ખૂણાની બરાબર અને



પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને कई ने ड સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો એટલે, डई લીટી अब લીટીને સમાંતર થશે.

સિદ્ધતા.

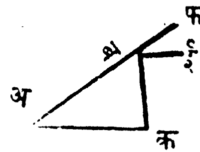
કેમકે, फक લીટી डई તથા अब લીટીઓને છેદેછે, અને તેથી થયેલા ईकफ તથા अफक વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (આકૃ. ૨૯. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, अब તથા डई લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે.

૧. સાધનમાં ૨૩ પ્રતિ. પ્ર. ખૂણો રાખવાનો છે તે વ્યુત્ક્રમજ રાખવો જોઇએ.

પ્રતિજ્ઞા ૩૨ મી પ્રમેય.

કોઈ (अबक) ત્રિકોણની કોઇ પણ (अब) બાજુને વધારી તો, બહારનો फबक ખૂણો, માંહેના અને સામેના (अ તથા क) એ ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર થશે (૧ બા.); અને હરેક ત્રિકોણના માંહેના ત્રણ ખૂણાઓને સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થશે (૨ બા.).

बनीपार अक ने સમાંતર बई (૩૧પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, फबई ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) માંહેના बअक ખૂણાની બરાબરછે. અને ईबक ખૂણો પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.)વ્યુત્ક્રમ अकब ખૂણાની બરાબરછે. તેથી फबई તથા ईबक ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) अ તથા क ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબરછે. અને फबई તથા



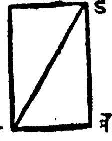
ईबक ખૂણાના સર્વાળા બરાબર આખો फबक ખૂણો છે. માટે, બહારનો फबक ખૂણો માંહેના अ તથા क એ ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબરછે (૧ બા. સિદ્ધ થઇ.)

फबक ખૂણો (આ પ્રતિજ્ઞાની ઉપલી ૧ બા. પ્ર.) अ તથા क ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. તે બંને બરાબર પરિમિતોમાં अबक ખૂણો મેળવીએ તો, फबक તથા अबक ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) अ તથા क તથા अबक ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર છે પણ, फबक તથા अबक ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબરછે. માટે, अ તથા क તથા अबक ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.)બે [illegible] બરાબર છે. એ (૨ બા.) [illegible]

પ્રતિજ્ઞા ૩૩ મી પ્રમેય.

કોઈ (अब તથા कड) બે સમાન અને સમાંતર સીધી લીટીઓના પાસ પાસેના (अ તથા क અને ब તથા ड) છેડાઓને સાંધનારી (अक તથા बड) સીધી લીટીઓ પણ જાતે **સમાન** (૧ બા.); અને **સમાંતર** (૨ બા.) થશે.

अ તથા ड બિંદુઓને (૧ સ્ત્રી. પ્ર.) સાંધ્યા. कडअ તથા बअड ત્રિકોણોમાં कड તથા अब બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને अड બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને कडअ તથા बअड વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, अक તથા बड પાયા અને कअड તથા बडअ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) **બરાબર** છે. (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

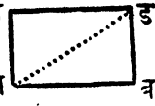


હવે, अड સીધી લીટી अक તથા बड સીધી લીટીઓને છેદે છે, અને વ્યુત્ક્રમ (कअड તથા बडअ) ખૂણાઓ બરાબર કરેછે. માટે, अक તથા बड સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) **સમાંતર** છે એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૩૪ મી પ્રમેય.

એક (अड) સમાંતર બાજુ ચોખૂણની (अब તથા कड અને अक તથા बड) **સામસામેની** બાજુઓ **અરસ્પરસ બરાબર** છે (૧ બા.); તેમજ (अ તથા ड અને क તથા ब) સામસામેના ખૂણાઓ પણ બરાબર છે (૨ બા.); અને સમાંતર બાજુ ચોખૂણ જાતે તેની (अड) કર્ણ લીટીથી દુભગાએલો છે (૩ બા.).

कड તથા अब સમાંતર સીધી લીટીઓને अड છેદેછે. તેથી, अडक તથા डअब વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ कअ તથા डब સીધી લીટીઓને अड લીટી છેદેછે. તેથી, अडब તથા डअक વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, अकड તથા डबअ ત્રિકોણોમાં कडअ તથા डअक ખૂણાઓ અનુક્રમે डबअ ત્રિકોણના डअब તથા अडब ખૂણાની બરાબર છે. અને अड બાજુ બંને ત્રિકોણોમાં સામાન્ય છે તેથી (૨૬ પ્રતિ. પ્ર.) कड બાજુ अब બાજુની અને अक તે बड બાજુની બરાબર છે (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)



છે અને डकअ તથા कअब

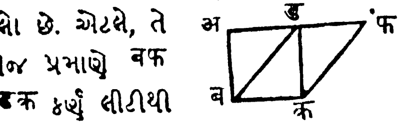
ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને कडब તથા डबअ ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. એ બંનેમાંથી અનુક્રમે क તથા ब બરાબર ખૂણાઓ બાદ કર્યા તો બાકીના कअब તથા कडब ખૂણા (૩ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર રહેશે. (અગર अडक તથા डअब બરાબર ખૂણાઓમાં अडब તથા डअक બરાબર ખૂણાઓ ઉમેર્યા તો આખા कअब તથા कडब ખૂણા (૨ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર થશે. ૨ બા. સિદ્ધ થઈ.)

હવે, कडअ તથા डअब ત્રિકોણોમાં कड બાજુ (આ પ્રતિજ્ઞાની પહેલી બા. પ્ર.) अब બાજુની બરાબર છે; अड બાજુ બંનેમાં સાધારણ છે; અને कडअ ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) डअब ખૂણાની બરાબર છે માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો બરાબર છે. એટલે, अड સમાંતર બાજુ ચોખૂણના તેની अड કર્ણ લીટીથી कडअ તથા डअब બે ત્રિકોણો થયેલા છે તે બંને બરાબર થયા. એટલે, अड સમાંતર બાજુ ચોખૂણું તેની अड કર્ણ લીટીથી દુભગાયો (એ ત્રીજી બા. સિદ્ધ થઈ).

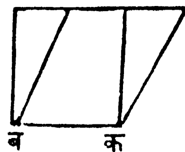
પ્રતિજ્ઞા ૩૫ મી પ્રમેય.

એકજ (बक) પાયા ઉપરના તથા એકજ (बक તથા अफ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (बड તથા बफ) સમાંતર બાજુ ચોખૂણો* બરાબર છે.

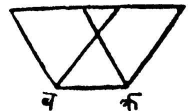
(પહેલી રીતે) કેમકે, बड સમાંતર બાજુ ચોખૂણું તેની बड કર્ણ લીટીથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભગાએલો છે. એટલે, તે बडक ત્રિકોણથી બમણો છે. તેજ પ્રમાણે बफ સમાંતર બાજુ ચોખૂણું પણ તેની डक કર્ણ લીટીથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભગાએલો છે. એટલે, તેપણ बडक ત્રિકોણથી બમણો છે. તેથી, बड તથા बफ સમાંતર બાજુ ચોખૂણો (૬ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.



(બીજી રીતે) અથવા આ સાથેની આકૃતિઓ પ્રમાણે ચોખૂણો હોય તો बअफ તથા कडफ ખૂણાઓ અને बईअ તથા कफड ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને अब તથા डक બાજુઓ પણ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, (૨૬ પ્રતિ. ની બીજી



(૧ આકૃતિ.)



(૨ આકૃતિ.)

*અત્રે એજ ચોખૂણો લેઈ બતાવ્યા છે પણ ગમે તે...

રીત પ્ર.) बअई તથા कइफ ત્રિકોણો બરાબર છે; હવે, बअफक ત્રાપીજ્ય-મમાંથી बअई ત્રિકોણ બાદ કરીએ તો, બાકી बफ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ અને बअफक ત્રાપીજ્યમમાંથી कइफ ત્રિકોણ બાદ કરીએ તો બાકી बइ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ રહેશે તેઓ બંને (૩ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર રહેશે* (બંને આકૃતિઓમાં ઉપરની સિદ્ધતા લાગુ થશે.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૬ મી પ્રમેય.

બરાબર (बक तथा इह) પાયા ઉપરના અને એકજ (बह તથા अग) સમાંતર સીધી લીટીઓની વચ્ચેના (बइ તથા इग) સમાંતર બાજુ ચોખૂણો બરાબર છે.

बफ તથા कग (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. बक તથા इह લીટીઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને इह તથા फग (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, बक તથા फग (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે. અને તેઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) સમાંતર પણ છે. માટે, તેઓના છેડાને સાંધનારી बफ તથા कग લીટીઓ પણ (૩૩ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે એટલે, बग (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ થયો. માટે, बक એકજ પાયા ઉપરના અને बक તથા अग એકજ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના बइ તથા बग સમાંતર બાજુ ચોખૂણો (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેજ પ્રમાણે फग પાયા ઉપરના અને बह લીટી વચ્ચેના बग તથા इग એ બંને ચોખૂણો પણ (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, बइ તથા इग સમાંતર બાજુ ચોખૂણો (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

---

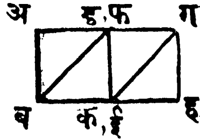
* ઉપરની સિદ્ધતામાં अब તથા बक બાજુ લેવાને બદલે अई તથા इफ લેઇને (૨૬ પ્રતિ. ની ૧ બા. પ્ર.) बअई તથા कइफ ત્રિકોણો બરાબર થઈ શકે. કેમકે, अइ તથા बक બાજુઓ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ बक અને ईफ બાજુઓ પણ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે તેથી अइ તથા ईफ બાજુઓ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમાંથી ईइ બાદ કરવાથી (ત્રીજા પ્રસ. પ્ર.) अई તથા इफ બાજુઓ બરાબર રહેશે. (૧ લી આકૃતિ જુઓ!).

અને अइ તથા ईफ માં इई મેળવવાથી अई તથા इफ (૨ પ્રસ. ... બીજી આકૃતિ જુઓ.)

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં એવું ધારી લીધેલું છે કે, બરાબર પાયાઓને એકજ સીધી લીટીમાં મૂકેલા છે. જો, એ પ્રમાણે ન હોય તો પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકશે નહિ.

૨. સમાંતર બાજુ ચોખૂણનાં જે બે બિંદુઓ સાંધવાનાં છે. તેઓ દરેક ચોખૂણની એકજ તરફનાં અને વ્યુત્ક્રમ જોઈએ.

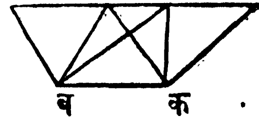
(બીજી રીતે) સરખા પાયા જોડાજોડ લેવાથી પાસેની આકૃતિમાં ઉપરની સિદ્ધતા લાગુ થશે.



પ્રતિજ્ઞા ૩૭ મી પ્રમેય.

એકજ (**बक**) પાયા ઉપરના અને એકજ (**बक** તથા **अड**) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (**बअक** તથા **बडक**) ત્રિકોણો બરાબર* છે.

कअ ને સમાંતર **ब** બિંદુની પાર **बई** અને **बड** ને સમાંતર પણ **क** બિંદુમાંથી **कफ** (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને **बई** ને મળતાં સુધી અને બીજી તરફ **कफ** ને મળતાં સુધી **अड** ને (૨ સ્વી.પ્ર.) વધારો. એટલે, **बईअक** તથા **बडफक** (૨૯ **अ** વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણો થશે. અને તેઓ એકજ **बक** પાયા ઉપર અને એકજ **ईफ** સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે તેથી (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) તેઓ બરાબર છે; અને **बअक** ત્રિકોણ **बईअक** સમાંતર બાજુ ચોખૂણનું અને **बडक** ત્રિકોણ **बडफक** સમાંતર બાજુ ચોખૂણનું (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અર્દ્ધ છે. માટે તે બંને અર્દ્ધા (૭ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, **बअक** તથા **बडक** ત્રિકોણો બરાબર છે એ સિદ્ધ.



૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં માત્ર બેજ ત્રિકોણો બરાબર કરી બતાવ્યા છે. પણ, બે કરતાં વધારે ત્રિકોણો આપ્યા હોય તો, તેઓ પણ બરાબર છે એમ સિદ્ધ થાય.

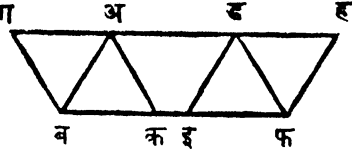
પ્રતિજ્ઞા ૩૮ મી પ્રમેય.

બરાબર (**बक** તથા **ईफ**) પાયા ઉપરના અને એકજ (**बफ** તથા

* ક્ષેત્રફળમાં બરાબર, પણ એકરૂપ કહેવાય નહિ. માટે, છવીશમી પ્રતિજ્ઞા નીચેની ટિકામાં આ પ્રતિજ્ઞા આવે નહિ.

अड)સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (बअक* તથા इडफ*) ત્રિકોણો બરાબર*છે.

ब બિંદુની પાર अक ને સમાંતર बग લીટી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને फ બિંદુની પાર इड ને સમાંતર



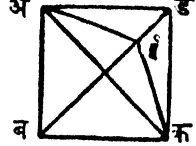
(૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) फह દોરો. अड લીટી बग ને મળતાંસુધી અને બીજી તરફ फह ને મળતાં સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે, गबकअ તથા डइफह (૨૯ अ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણો થશે. અને તેઓ (૩૬ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, बअक ત્રિકોણ गबकअ ચોખૂણનું અને इडफ ત્રિકોણ डइफह ચોખૂણનું (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અર્દ્ધ છે. તેથી, (૭ પ્રત્ય. પ્ર.) તે બંને અર્દ્ધા બરાબર છે. એટલે, बअक ત્રિકોણ इडफ ત્રિકોણની બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧. બરાબર પાયાઓ એકજ લીટીમાં મૂકેલા છે એવું ઉપન્યાસમાંધારેલું છે.

પ્રતિજ્ઞા ૩૯ મી પ્રમેય.

એકજ (बक) પાયા ઊપરના અને તેની એકજ તરફના (बअक તથા बडक) બરાબર ત્રિકોણો એકજ (बक તથા अड) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેછે.*

अ તથા ड ને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. बक ને સમાંતર अड છે. કેમકે, જો એ બે લીટીઓ સમાંતર ન હોય તો, बक ને સમાંતર अ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) अइ દોરો. અને इक (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. बक તથા अइ લીટીઓ સમાંતર છે. તેથી, बअक તથા बइक ત્રિકોણો (૩૭



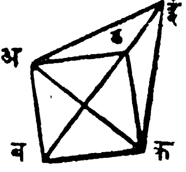
પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને बडक ત્રિકોણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) बअक ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, बइक તથા बडक ત્રિકોણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા. પણ, बइक ત્રિકોણનો बडक ત્રિકોણ એક ભાગ છે. માટે, ભાગ એ આખાની બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, अइ લીટી बक ને સમાંતર નથી. અને એજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, अड વગર બીજી કોઇપણ લીટી बक ને સમાંતર નથી. માટે, अड એજ बक ને સમાંતર છે.

---

* માત્ર બેજ ત્રિકોણ સમજવાના નથી. વધારે હોય તોપણ એ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. * સાડત્રીશમી પ્રતિજ્ઞા તળેની નોટ જુઓ.

પક્ષ છે.

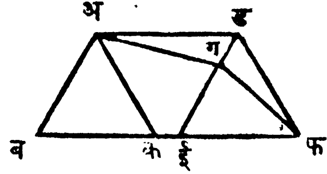
(બીજી રીતે) કદાચ, **अ** બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) **बक** ને સમાંતર દોરેલી **अई** લીટી **अड** લીટીથી ઊંચે પડે તો, **बड** ને **ई** સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને **ईक** (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. (પછી ઉપર પહેલી રીતમાં કહેલી બધી સિદ્ધતા લાગુ થશે.)



પ્રતિજ્ઞા ૪૦ મી પ્રમેય.

બરાબર (बक તથા ईफ) પાયા ઉપરના અને એકજ તરફના (बअक) તથા (ईडफ) બરાબર ત્રિકોણો એકજ (बफ તથા अड) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેછે.*

अ તથા **ड** ને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. એટલે, **बफ** ને સમાંતર **अड** થશે. કેમકે, જો **अड** લીટી સમાંતર ન હોય તો, **बफ** ને સમાંતર **अ** બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) **अग** દોરો. અને **गफ** (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



अग સીધી લીટી (આકૃ. રચ. પ્ર.) **बफ** ને સમાંતર છે, અને **बक** તથા **ईफ** બરાબર છે; તેથી, **बअक** અને **ईगफ** ત્રિકોણો (૩૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ **ईडफ** (ઉપન્યાસ પ્ર.) **बअक** ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, **ईगफ** તથા **ईडफ** ત્રિકોણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા. પણ **ईगफ** ત્રિકોણ **ईडफ** ત્રિકોણનો ભાગ છે એટલે, ભાગ એ આખાની બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, **अग** લીટી **बफ** ને સમાંતર નથી. અને એ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, **अड** વગર બીજી કોઈપણ લીટી **बफ** ની સાથે સમાંતર નથી. એટલે, **अड** લીટીજ **बफ** લીટીની સાથે સમાંતર છે એ સિદ્ધ*

(બીજી રીતે) કદાચ, **बफ** ને સમાંતર **अ** બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.)

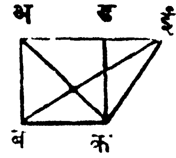
---

* આડત્રીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે. * ઉલટી સિદ્ધતાથી ...

દોરેલી अग લીટી अड લીટીથી છાયે પડે તો, ईड ને ग સુધી (૨ સ્વી. પ્ર) વધારો. અને गफ (૧ સ્વી. પ્ર)સાંધો. ઉપર પહેલી રીતમાં કહેલી બધી સિદ્ધતા લાગુ પડશે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૧ મી પ્રમેય.

જો, એક (बड) **સમાંતર બાજુ ચોખૂણુનો** અને **એક** (बईक) ત્રિકોણનો પાયો **એકજ** હોય, અને તેઓ **એકજ સમાંતર** લીટીઓની વચ્ચે હોય તો, સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ ત્રિકોણથી **બમણો** થશે.



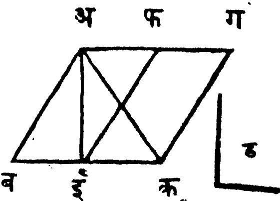
अ તથા क બિંદુઓ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. હવે, बअक તથા बईक ત્રિકોણો એકજ बक પાયા ઉપર અને बक તથા अई એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે. માટે (૩૭ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ बड સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ તેના अक કર્ણથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભગાયો છે એટલે बअक ત્રિકોણથી बड સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ બમણો છે. માટે बअक ત્રિકોણની બરાબરના बईक ત્રિકોણથી પણ बड સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ **બમણો** છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૨ મી કૃત્ય.

એક આપેલા (बअक) ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા (ड) ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક **સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ** કરવાનું.

સાધન.

अ બિંદુની પાર बक ને સમાંતર अफ સીધી લીટી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને ત્રિકોણના बक પાયાને ई આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. અને कई સીધી લીટી સાથે ई બિંદુ આગળ, કહેલા ड ખૂણાની બરાબર (૨૩ પ્રતિ. પ્ર.) कईफ ખૂણો કરો. अफ લીટીને ग આગળ મળે ત્યાંસુધી क ની પાર ईफ ને સમાંતર [illegible] પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, કરવાનો સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ कफ છે.



સિદ્ધતા.

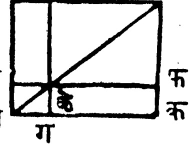
કેમકે, ईक (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) अग ને સમાંતર છે. અને ईफ પણ कग ની સાથે સમાંતર છે. તેથી, कफ (૨૯ अ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુછે.

વળી, बअई અને ईअक બંને ત્રિકોણો, बई અને ईक બરાબર પાયા ઉપર અને એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે. માટે, (૩૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, આખો बअक ત્રિકોણ ईअक ત્રિકોણથી બમણો છે. અને ईअक ત્રિકોણથી कफ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ પણ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે. માટે, बअक ત્રિકોણ તથા कफ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ બંને (૬ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે અને તેનો कईफ ખૂણો આપેલા ड ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, કરવાનો સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ कफ છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૩ મી પ્રમેય.

એક (अक) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુમાં કર્ણ લીટીની આસપાસની (ईग તથા हफ) સમાંતર બાજુ ચોખૂણોની (अके તથા कके) પુરવણીઓ બરાબર છે.

बड કર્ણ લીટી દોરો. અને તે માંહેલા કોઇપણ के બિંદુની પાર बक ને સમાંતર ईफ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને તેજ બિંદુથી अब ને સમાંતર गह પણ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો ત્યારે, કર્ણ લીટીની આસપાસના ईग તથા हफ (૨૯ अ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણો છે. અને अके તથા कके તેની પૂરવણીઓ છે.



अक સમાંતર બાજુ ચોખૂણુના તેની बड કર્ણ લીટીથી થયેલા बअड તથા बकड ત્રિકોણો (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. વળી, हफ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુની केड કર્ણ લીટીથી થયેલા केहड તથા केफड ત્રિકોણો પણ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; અને તેજ કારણથી ईग સમાંતર બાજુ ચોખૂણુની बके કર્ણ લીટીથી થયેલા बईके તથા बगके ત્રિકોણો બરાબર છે. તેથી केहड તથા बईके ત્રિકોણોનો સર્વાળો (૨ પ્રસ. પ્ર.) केफड તથા बगके ત્રિકોણોના સર્વાળા બરાબર છે.

આ બરાબર કરેલા સર્વાળા (केहड + बईके ત્રિકોણો તથા केफड + बगके ત્રિકોણો) ને बअड તથા बकड બરાબર ત્રિકોણોમાંથી

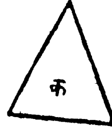
એટલે, બાકી अके તથા कके પૂરવણીઓ રહેશે તે (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૪ મી કૃત્ય.

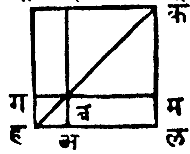
એક આપેલી (अत्र) સીધી લીટી ઉપર, એક આપેલા (क) ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો એક ખૂણો આપેલા એક (ड) ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક **સમાંતર બાજુચોખૂણુ** કરવાનું.

સાધન.

આપેલા क ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો व ખૂણો આપેલા ड ખૂણા ની બરાબર થાય અને वई લીટી अव ની સાથે એકજ સીધી લીટીમાં થાય એવો वईफग સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૪૨ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને फग (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને अ ની પાર वग ને સમાંતર अह (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને हव (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.







હવે, हल તથા फके સમાંતર છે. તેથી लहफ તથા हफके ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને તેથી वहफ તથા हफके ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે. એ માટે, हव તથા फई ને વધારીએ તો, તેઓ (૧૨ પ્રત્ય. પ્ર.) મળી જવી જોઇએ. ધારો કે, के આગળ તેઓ મળેછે. હવે, के બિંદુથી हफ ને સમાંતર केल (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને अह ને ल બિંદુ સુધી તથા वग ને म બિંદુ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે अम (૨૯ अ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ થશે. અને તે, જે સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ કરવાનો હતો તેજ છે.

સિદ્ધતા.

કેમકે, फल સમાંતર બાજુ ચોખૂણુમાં हके કર્ણ લીટીની આસપાસના સમાંતર બાજુ ચોખૂણોની अम તથા गई પૂરવણીઓ (૪૩ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ गई (આકૃ. રચ.) क ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, अम ચોખૂણુ પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) क ત્રિકોણની બરાબર છે. તેમજ ईवग ખૂણો (૧૫ પ્રતિ પ્ર.) अवम ખૂણાની બરાબર છે. અને ईवग (આકૃ. રચ. પ્ર.) ड ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, ड ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) अवम ખૂણાની બરાબર છે. એટલે,

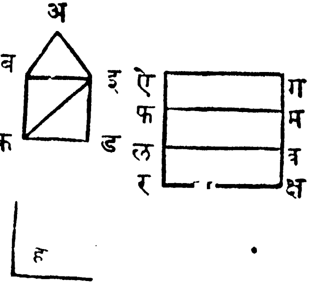
કરવાનો સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ अम છે. તે આપેલી अत्र લીટી ઉપર કીધેલો છે; આપેલા क ત્રિકોણની બરાબર છે: અને જેનો अत्रम ખૂણો આપેલા ड ખૂણાની બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૫ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (अबकडई) સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ह ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક **સમાંતર બાજુ** ચોખૂણુ કરવાનું.

સાધન.

આપેલી સીધી લીટી આકૃતિના ત્રિકોણો કરો, અને તેટલા સારૂ बई તથા कई (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. बअई ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો એક ऐ ખૂણો આપેલા ह ખૂણાની બરાબર એવો એક फग સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૪૪ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. તેની એક फम બાજુ ઉપર कबई ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો फ ખૂણો કહેલા ह ખૂણાની બરાબર એવો એક लम સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૪૪ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને તેની लत्र બાજુ



ઉપર कडई ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો ल ખૂણો આપેલા ह ખૂણાની બરાબર એવો रत्र સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૪૪ પ્રતિ. પ્ર) કરો. (એ પ્રમાણે આકૃતિના જેટલા ત્રિકોણો થયેલા છે, તેમાંના દરેકની બરાબર અને આપેલા ખૂણાની બરાબર ખૂણો રાખીને ૪૪ પ્રતિ. પ્ર. સમાંતર બાજુ ચોખૂણો કરવા.) એટલે, આપેલી સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર અને જેનો એક ऐ ખૂણો આપેલા ह ખૂણાની બરાબર એવો એક रग સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ થશે.

સિદ્ધતા.

ऐ ખૂણો (આકૃ. રચ. પ્ર.) ह ખૂણાની બરાબર છે. અને मफल ખૂણો પણ આકૃ. રચ. પ્ર. ह ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, ऐ ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર) मफल ખૂણાની બરાબર છે. એ બંનેમાં मफऐ ખૂણો મેળવો તો, ऐ તથા मफऐ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) मफल તથા मफऐ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થાય. પણ ऐग તથા फम સમાંતર લીટીઓને [illegible]

एृ તથા मफऐ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, मफल તથા मफऐ ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧પ્રસ.પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે.

હવે, ऐफ તથા फल લીટીઓ फम લીટીના फ બિંદુ આગળ વિરૂદ્ધ બાજુએ મળીને मफल તથા मफऐ ખૂણાઓ કરેછે અને તે બંને ખૂણાનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે તો, ऐफ તથા फल મળીને (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) એક અખંડ સીધી લીટી થાય છે. તેજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, फल તથા लर મળીને એક સીધી લીટી થાયછે. એટલે ऐर એક સીધી લીટીછે. વળી, ऐफ લીટી मव ની સાથે સમાંતર છે. તેથી ऐफम ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) વ્યુત્ક્રમ फमव ખૂણાની બરાબર છે. તે બંનેમાં फमग ખૂણો મેળવો એટલે, ऐफम તથા फमग ખૂણાનો સર્વાળો (૨ પ્રસ. પ્ર.) फमव તથા फमग ખૂણાની બરાબર છે. પણ, ऐफम તથા फमग ખૂણાનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, फमव તથા फमग ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, गम તથા मव મળીને (૧૪ પ્રતિ. પ્ર) એક સીધી લીટી થાયછે. એજ પ્રમાણે मव તથા वक्ष ને માટે સિદ્ધ થઈ શકે છે. એટલે गक्ष સીધી લીટી છે. અને તે ऐर ની સાથે સમાંતર પણ છે; रक्ष તથા फम એકજ लव લીટીની સાથે સમાંતરછે. તેથી रक्ष લીટી फमની સાથે (૩૦ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે. અને फम ની સાથે ऐग તથા रक्ष સમાંતર છે તેથી, रग (૨૯ મ વ્યા. પ્ર.) એક સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ છે.

फग સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ बभई ત્રિકોણની અને लम સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ कबई ત્રિકોણની અને रव સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ कडई ત્રિકોણની બરાબર છે. એ બધા સમાંતર બાજુ ચોખૂણોનો સર્વાળો रग સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ છે અને એ બધાં ત્રિકોણોનો સર્વાળો अबकडई આકૃતિછે માટે આખો रग સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૨પ્રસ પ્ર.) આપેલી अबकडई આકૃતિની બરાબર છે. અને તેનો ऐ ખૂણો આપેલા ह ખૂણાની બરાબર છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૬ મી કૃત્ય*.

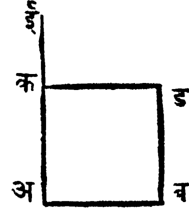
એક આપેલી (अब) સીધી લીટી ઉપર એક ચોરસ કરવાનું.

---

*આ છેલ્લી કૃત્ય પ્રતિજ્ઞા છે. આ સ્કંધમાં ૧, ૨, ૩, ૯, ૧૦, ૧૧, ૪૨ ૪૪. ૪૫ અને ૪૬ એ ચૌદ કૃત્ય પ્રતિજ્ઞાઓ છે.

સાધન.

આપેલી अब લીટીના अ બિંદુથી अब લીટી ઉપર (૧૧પ્રતિપ્ર.) अई લંબ દોરો અને તેમાંથી अब ની બરાબર अक (૩પ્રતિ.પ્ર.) કાપો. क ની પાર अब ને સમાંતર कड અને ब ની પાર अक ને સમાંતર बड (૩૧પ્રતિ. પ્ર) દોરો. એટલે, કરવાનો ચોરસ अड છે.



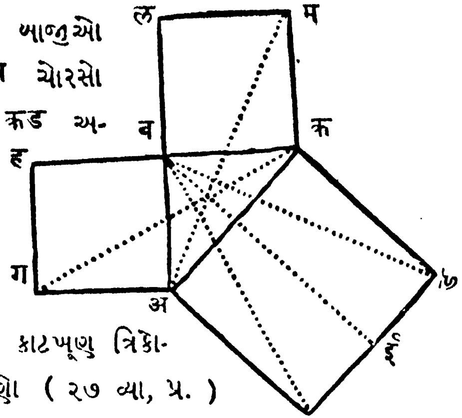
સિદ્ધતા.

કેમકે, अड ચોખૂણુની બંને તરફની સામસામેની બાજુઓ (આકૃ. ૨૪ પ્ર.) સમાંતર છે. માટે તે (૨૯ अ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુછે. તેથી તેની अब તથા कड સામ સામેની બાજુઓ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર અને તેજ પ્રમાણે अक તથા बड બાજુઓ બરાબર અને अबની બરાબર अक રાખેલી છે. તેથી, अब, कड, अक અને बड એ ચારે બાજુઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) અરસ્પરસ બરાબર છે. તેથી, अड (૩૦ વ્યા. પ્ર,) **સમાંતર સમબાજુ ચોખૂણુ** અથવા લૉઝેન્જ છે.

अब સીધી લીટી ઉપર अक લંબ છે. તેથી, बअक ખૂણો (૧૦ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. અને बअक તથા कडब ખૂણા (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, कडब ખૂણો પણ કાટખૂણો. હવે, कड તથા अब સમાંતર લીટીઓને अक લીટી છેદેછે. તેથી, बअक તથા अकड ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. પણ बअक ખૂણો કાટખૂણો છે તો બાકીનો अकड ખૂણો પણ કાટખૂણો અને તેની સામેનો अबड ખૂણો (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) अकड ખૂણાની બરાબર છે. માટે, તે પણ કાટખૂણો એટલે, તે ચારે કાટખૂણા (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર. માટે, अड લૉઝેન્જ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) ચોરસ છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૭ મી પ્રમેય.

એક (अबक) કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં (अक) કર્ણનો વર્ગ (अब તથા बक) બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર છે.



अव, अक તથા वक બાજુઓ ઉપર अह, अड તથા वम ચોરસો (૪૬ પ્રતિ પ્ર.) કરો. અને कड અ-થવા अफ લીટીને સમાંતર व બિંદુથી वई (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને वफ તથા कग (૧સ્વી.પ્ર.) સાંધો.

अवक ત્રિકોણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) કાટખૂણુ ત્રિકોણ છે. તેથી, તેનો अवक ખૂણો (૨૭ વ્યા, પ્ર.) કાટખૂણો છે. અને अवह ખૂણો પણ अह ચોરસનો ખૂણો છે. માટે, (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી, अवक તથા अवह ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા છે.

હવે, वक તથા वह લીટીઓ अव લીટીના व બિંદુ આગળ મળેછે. અને अवक તથા अवह ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, हक (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) અખંડ સીધી લીટી થશે. તેજ પ્રમાણે वअ તથા वल મળીને अल અખંડ સીધી લીટી થશે.

હવે, अगक તથા अवफ એ બે ત્રિકોણો લઇએ તો, તેની अग તથા अव બાજુઓ अह ચોરસની બાજુઓ છે માટે (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ अक તથા अफ બાજુઓ પણ अड ચોરસની બાજુઓ છે તેથી (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને वअग ખૂણો अह ચોરસનો ખૂણો છે માટે (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. અને कअफ ખૂણો પણ अड ચોરસનો ખૂણો છે માટે તે પણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી એ બંને ખૂણા (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. આ બંને બરાબર ખૂણાઓમાં वअक ખૂણો મેળવીએ તો, આખો कअग ખૂણો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) वअफ ખૂણાની બરાબર થશે. એટલે, अगक તથા अवफ ત્રિકોણોની બબે બાજુઓ તથા તેથી થયેલા અંતરખૂણા બરાબર થયા, તેથી (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો એક રૂપ છે.

પણ हक લીટી गअ સાથે સમાંતર છે તેથી गअ એકજ પાયા ઉપરના અને हक એકજ સમાંતર લીટી વચ્ચેના अगक ત્રિકોણથી अह સમાંતર બાજુ ચોખૂણ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે. અને તેજ પ્રમાણે अफ

એકજ પાયા ઉપરના અને बई સમાંતર લીટી વચ્ચેના अबक ત્રિકોણથી अई સમાંતરબાજુચોખૂણ બમણો છે. એટલે, अह તથા अई સમાંતર બાજુચોખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે.

વળી, अम તથા बड બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધવાથી થયેલા मअक તથા डबक ત્રિકોણો બરાબર છે. કેમકે, તે બંને ત્રિકોણોની मक તથા बक બાજુઓ એકજ बम ચોરસની બાજુઓ છે તેથી (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ कअ તથા कड પણ એકજ अड ચોરસની બાજુઓ છે તેથી તેઓપણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને मकब ખૂણો बम ચોરસનો ખૂણોછે માટે, (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેમજ अकड ખૂણો પણ अड ચોરસનો ખૂણો છે માટે, તેપણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી (૧૧પ્રત્ય.પ્ર.) એ બંને ખૂણા બરાબર. તે દરેકમાં बकअ ખૂણો પ્રથક પ્રથક મેળવીએ તો, આખા मकअ તથા बकड ખૂણા (૨પ્રત્ય.પ્ર.) બરાબર થશે. એટલે मअक તથા डबक ત્રિકોણોમાંથી એકની બે બાજુઓ અને અંતરખૂણો અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતરખૂણાની બરાબર તેથી (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો બરાબર છે.

मक એકજ પાયા ઉપર અને मक તથા अल એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના मअक ત્રિકોણ તથા कल ચોરસ છે તેથી मअक ત્રિકોણથી कल ચોરસ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે તેમજ कड એકજ પાયા ઉપર અને बई એકજ સમાંતરલીટીઓની વચ્ચે डबक ત્રિકોણ તથા कई સમાંતરબાજુચોખૂણ છે તેથી, डबक ત્રિકોણથી कई ચોખૂણ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે.

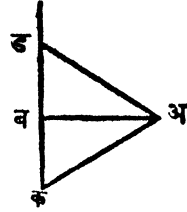
अह ચોરસ (ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્રમાણે) अई સમાંતર બાજુ ચોખૂણ બરાબર અને कल ચોરસ कई સમાંતર બાજુ ચોખૂણ બરાબર તેથી अह તથા कल ચોરસોનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) अई તથા कई સમાંતર બાજુ ચોખૂણોના સર્વાળા બરાબર છે. અને अई તથા कई ચોખૂણો મળીને अड ચોરસ થયેલો છે એટલે, अह તથા कल ચોરસોના સર્વાળા બરાબર अड ચોરસ છે. अह તથા कल ચોરસો આપેલા કાટખૂણ ત્રિકોણની अब તથા बक બાજુઓ ઊપર કીધેલા છે. અને अड ચોરસ अक કર્ણ ઉપર કીધેલો છે. ચોરસને ભૂમિતિવિદ્યામાં વર્ગ કહેછે. માટે, अबक કાટખૂણ ત્રિકોણમાં

अक કર્ણ લીટીનો વર્ગ अब તથા बक બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૮ મી પ્રમેય.*

જો, એક (अबक) ત્રિકોણની (अक) એક બાજુનો વર્ગ બીજી (अब તથા बक) બે બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર હોય તો, તે બાજુની સામેનો (अबक) ખૂણો કાટખૂણો થશે.*

ब બિંદુથી તેની એક अब બાજુ ઉપર (૧૧પ્રતિ.પ્ર.) बई લંબ દોરો; અને बक ની બરાબર बड (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને अड (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



अबड ત્રિકોણનો ब ખૂણો કાટખૂણો છે. માટે, તે (૨૭ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણુ ત્રિકોણછે. તેથી, अड કર્ણ લીટીનો વર્ગ (૪૭ પ્રતિ. પ્ર.) अब તથા बड બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબરછે. અને बड (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) बक ની બરાબર રાખેલી છે. તેથી, अड નો વર્ગ अब તથા बक ના વર્ગના સર્વાળાની બરાબર છે; પણ अब તથા बक ના વર્ગોનો સર્વાળો (ઉપન્યાસપ્ર.) अक ના વર્ગની બરાબર છે. માટે, अड તથા अक ના વર્ગો બરાબર છે. તેથી, अड તથા अक લીટીઓ જાતે પણ બરાબરછે; હવે, બને ત્રિકોણોમાં बड તથા बक બાજુઓ બરાબરછે અને अब બાજુ સાધારણ છે. અને अड તથા अक ઉપર બરાબર કરી તેથી, अबक તથા अबड ત્રિકોણો અરસ્પરસ સમબાજુ છે; માટે, (૮પ્રતિ.પ્ર.) અરસ્પરસ સમખૂણુ પણ છે. અને તેથી अबक ખૂણો अबड ખૂણાની બરાબર છે; પણ अबड ખૂણો કાટખૂણો છે. તેથી अबक ખૂણો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કાટખૂણોછે એ સિદ્ધ.



ઉપયોગી અનુમાનો.

પ્રતિજ્ઞા ૫ મી.

અનુમાન ૧ લું--સમબાજુ ત્રિકોણ સમખૂણુ છે. કેમકે, હરેક બે બરાબર બાજુઓની સામેના ખૂણા બરાબર છે.

---

* આ છેલ્લી પ્રમેય પ્રતિજ્ઞા છે. આરકંધમાં ૪,૫,૬,૭,૮,૧૩,૧૪,૧૫,૧૬,૧૭,૧૮,૧૯,૨૦, ૨૧,૨૪,૨૫,૨૬, ૨૭,૨૮,૨૯,૩૦,૩૨, ૩૩,૩૪,૩૫,૩૬,૩૭,૩૮,૩૯,૪૦,૪૧,૪૩,૪૭ અને ૪૮એ ચોત્રીશ પ્રમેય પ્રતિજ્ઞાઓ છે.

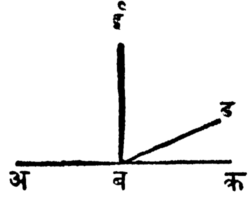
* સુડતાળીશમીનો ઉલટ પક્ષછે.

પ્રતિજ્ઞા ૬ ઠી.

અનુમાન ૧ લું—સમખૂણુ ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે. કેમકે, બે બરાબર ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૧ મી.

અનુમાન ૧ લું—બે સીધી લીટીઓને સામાન્ય ખંડ હોઈ શકતો નથી. કેમકે, જો હોઇ શકે તો ધારો કે अबक તથા अबड એ સીધી લીટીઓમાં બંનેને अब ખંડ સામાન્ય છે. ब બિંદુથી अब ઉપર बई લંબ (આ.પ્રતિ.પ્ર.) દોરો. अबक સીધી લીટી છે તેથી (૧૦વ્યા.પ્ર.) कबई ખૂણો ईबअ ખૂણાની બરાબર છે; તેજ પ્રમાણે अबड



સીધી લીટી છે, તેથી डबई ખૂણો ईबअ ખૂણાની બરાબર છે; માટે ईबड ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) कबई ખૂણાની બરાબર છે પણ એ (૯પ્રત્ય.પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે બે સીધી લીટીઓને સામાન્ય ખંડ હોઈ શકતો નથી.

પ્રતિજ્ઞા ૧૩ મી.

અનુમાન ૧ લું—એકજ સીધી લીટી ઉપર એકજ બિંદુ આગળ કેટલીએક સીધી લીટીઓ પડીને તેની સાથે જે ખૂણાઓ કરે, તે સઘળા ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે.

અનુમાન ૨ જું—જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદીને ખૂણાઓ કરે તો આ સઘળા ખૂણાઓનો સર્વાળો ચાર કાટખૂણા બરાબર છે.

અનુમાન ૩ જું—કેટલીએક સીધી લીટીઓ એકજ બિંદુથી કેંદ્રવિચળ થાય તો તેથી આસપાસના અવકાશમાં જે ખૂણાઓ થાય તેઓનો સર્વાળો ચાર કાટખૂણા બરાબર થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૮ મી.

અનુમાન ૧ લું—એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ બીજી બાજુ કરતાં મોટી, તેની બરાબર અથવા તેનાથી નાની હોય તે પ્રમાણમાં પહેલી બાજુ સામેનો ખૂણો બીજી બાજુ સામેના ખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર અથવા નાનો થશે. (પાંચમી પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઇએ)

અનુમાન ૨ બીજું—વિષમ બાજુ ત્રિકોણના સઘળા ખૂણા વિષમછે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૯ મી.

અનુમાન ૧ લું—એક ત્રિકોણની એક બાજુ સામેનો ખૂણો બીજી બાજુ સામેના ખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર, અથવા નાનો હોય તે પ્ર

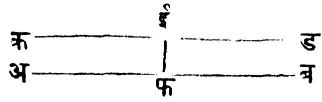
બીજી બાજુ કરતાં પહેલી બાજુ મોટી બરાબર અથવા નાની થશે. (૭મી પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઇએ.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૫ મી.

અનુમાન ૧ લું—બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય અને તેઓની વચ્ચેનો અંતરખૂણો બીજાના અંતરખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર અથવા નાનો હોય તે પ્રમાણમાં પહેલા ત્રિકોણનો પાયો બીજા ત્રિકોણના પાયાથી મોટો, બરાબર અથવા નાનો થશે. (ચોથી પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઇએ.)

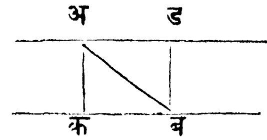
પ્રતિજ્ઞા ૨૯ મી.

અનુમાન ૧ લું—બે સમાંતર લીટીઓ માંહેલી એક अब ઉપર જો કોઈ ईफ લીટી લંબ હોય તો બીજી कड ઉપર પણ તે ईफ લીટી લંબ થશે; કેમકે વ્યુત્ક્રમ ખૂણા બરાબર છે.



અનુમાન ૨ જું—બે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના સઘળા લંબો બરાબર છે.

કેમકે, अब દોરો बअक તથા अबड ખૂણાઓ વ્યુત્ક્રમ છે, તેથી તેઓ બરાબર છે. અને बअड તથા अबक તેજ કારણથી બરાબર છે अब બાજુ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે તેથી (૨ પ્રતિ.પ્ર.) अक તથા बड બાજુઓ બરાબર છે.



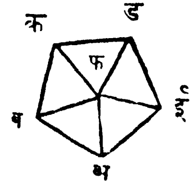
પ્રતિજ્ઞા ૩૦ મી.

અનુમાન ૧ લું—એકજ લીટી સાથેની બે સમાંતર લીટીઓ એકજ બિંદુની પાર જઇ શકતી નથી.

પ્રતિજ્ઞા ૩૨ મી.

અનુમાન ૧ લું—કોઇ પણ अबकडई સીધી લીટી આકૃતિના સઘળા માંહેના ખૂણાઓની સાથે ચાર કાટખૂણા મેળવીએ તો, આકૃતિમાં જેટલી બાજુઓ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર તેઓ થશે.

એ આકૃતિની માંહે કોઇ પણ फ બિંદુ લો, અને फअ, फब, फक, फड તથા फई (૧લી.પ્ર.) સાંધો. એટલે, આકૃતિઓમાં જેટલી બાજુઓ છે તેટલા ત્રિકોણ બન્યા. અને તેથી તેના સઘળા ખૂણાઓનો સરવાળો (૩૨પ્રતિ.પ્ર) આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર છે. પણ फ બિંદુ આ- ૩૫ ખૂણાઓ(૧૩ પ્રતિ. ના ૩ અનુ. પ્ર.) ચાર કાટખૂણા બરાબર છે;



જાહેર ખબર.

વિનતિ કે, અમે ગયા ફેબ્રુઆરીના શાળાપત્રમાં બે પુસ્તકો તૈયાર વગેરેની જાહેર ખબર મૂકી હતી; તેમાંથી એક પુસ્તક તૈયાર થયું તે અને "દેશીનામાનો સંક્ષેપ" એ નામનું બીજું પુસ્તક પણ મજકુર હેરખબર અનુસાર પ્રગટ કરવાના વિચારમાં છીએ. આ પુસ્તક શાળો-યોગી તેથી ઘણી ગરીબ સ્થિતિના વિદ્યાર્થિઓ પણ તેનો લાભ લેઇ શકે માટે, **કીંમત બહુ જૂજ** રાખેલી છે. જેની આ પુસ્તક ખરીદવાની ઇચ્છા હોય તેણે નીચે લખેલે ઠેકાણે કીંમત મોકલી અગર વેલ્યુપેએબલ મંગાવવા તજવીજ કરાવવી.

રાજકોટ— કર્તા પાસે
દફર. બેચર મેઘજી બુકસેલર પરામાં.
ભાઈ નાનાલાલ નાગરદાસ સ્ટેશન સ્કૂલના પહેલા આસિસ્ટંટ માસ્તર.

મુંબાઇ—બુકસેલર દામોદર ઇશ્વરદાસ લાઇબ્રેરીવાળા.

વડોદરા—રા. લીલાધર પ્રભાશંકર ફીમેલ ટ્રેનિંગ કૉલેજ.

ભાવનગર—રા. રા. તારાચંદ ત્રીકમદાસ ખાનગી કેળવણી દફતરે શિરસ્તેદાર.

વઢવાણ સ્ટેશન—વકીલ, તલકશી હીમજી.

નગર—ધ્રુ દુર્લભદાસ શામજી ધ્રુ ફળીઆમાં.

—ગુલાબચંદ તારાચંદ ભાગલ પોળ.

વરનાં ગ્રાહકોએ ટપાલખર્ચનો અર્ધો આનો વિશેષ મોકલવો.

આજ્ઞાત
ફ બિંદુ આ-
બરાબર છે.